回路･システム学第三
2ポート回路(2)

2008.6.10

担当教官　山尾　泰

Today's Menu

壱、先々週提出のレポートの解答

弐、先週の講義のおさらい

参、2ポート回路の行列表示(2)

先々週提出のレポートの解答

第１回レポート

１. 図1の回路の電圧伝達関数 $H(s)$ を回路素子の駆動点インピーダンスから求めよ。

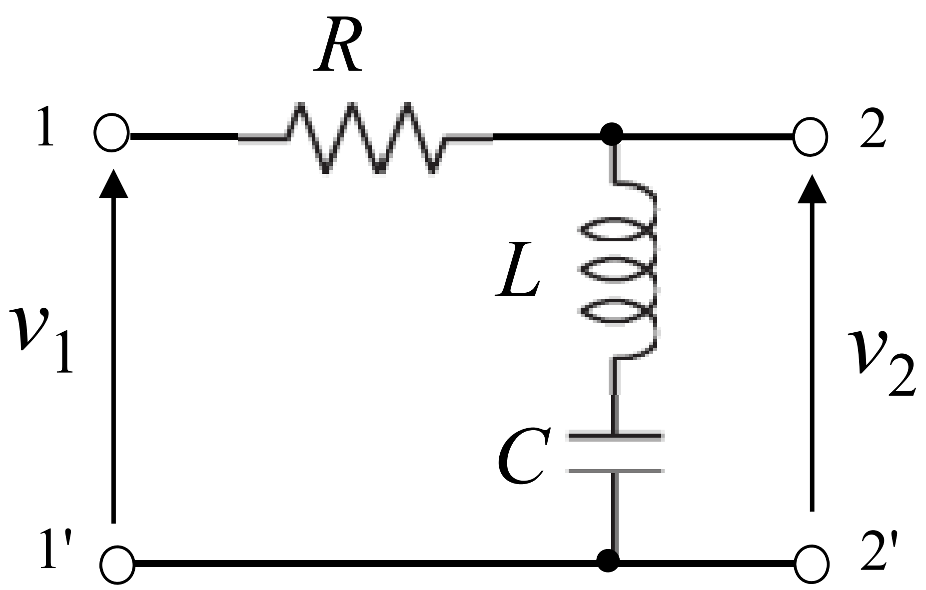
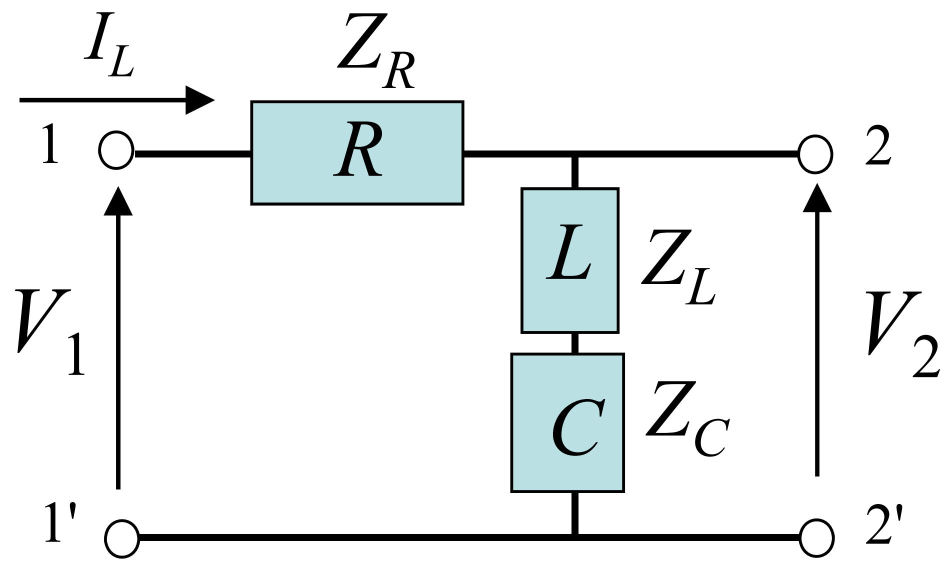


図1

第１回レポート - 解答(問題1)

この回路を駆動点インピーダンスで考えると



$$V_2 = I_L(Z_L + Z_C) = \frac{V_1}{Z_R + Z_L + Z_C}(Z_L + Z_C)$$

$$\therefore\ H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L + Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C}$$

（続き）

各回路素子の駆動点インピーダンスは

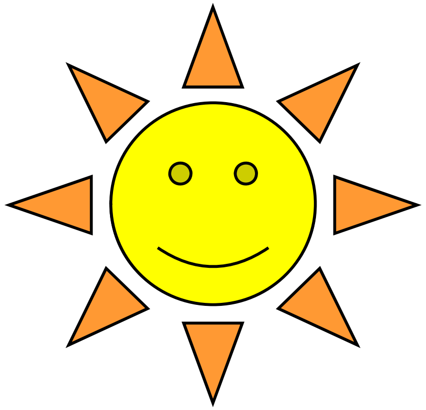
抵抗	コイル	コンデンサ
$Z_R(s) = R$	$Z_L(s) = Ls$	$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$

以上を代入すると

$$H(s) = \frac{Z_L + Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{Ls + \frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

これを s について整理して

$$\boxed{H(s) = \frac{s^2 CL + 1}{s^2 LC + sCR + 1}}$$



正 解

第１回レポート（続き）

２. 図１の回路において

(1) $R = 1[\Omega],\ L = 0.5[H],\ C = 1[F],$

(2) $R = 2[\Omega],\ L = 0.5[H],\ C = 1[F],$

としたそれぞれの場合の$H(s)$ の零点および極を求めよ。

第１回レポート - 解答(問題2)

(1) $R=1[\Omega],\ L=0.5[H],\ C=1[F]$ を$H(s)$に代入

$$H(s)=\frac{s^2+2}{s^2+2s+2}$$

零点は　分子＝0　とおいて

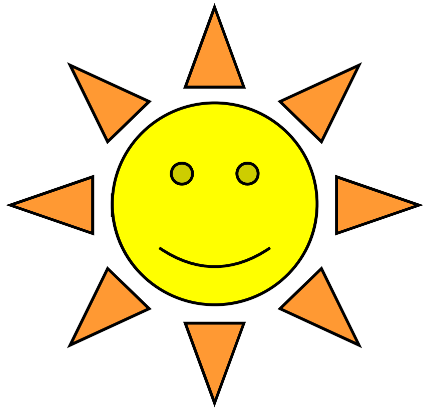
$$s^2+2=0 \quad \therefore s=\pm\sqrt{2}j$$

このとき分母＝0ではないので零点である

極は　分母＝0　とおいて

$$s^2+2s+2=0 \quad \therefore s=-1\pm j$$

このとき分子＝0ではないので極である



正 解

極が複素共役根であるから、過渡応答は
固有角周波数 ω_n =(極の虚部)=1 の減衰振動を伴う

第１回レポート - 解答(問題2)

(2) $R = 2[\Omega],\ L = 0.5[H],\ C = 1[F]$ を$H(s)$に代入

$$H(s) = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 4s + 2}$$

零点は　分子＝0　とおいて

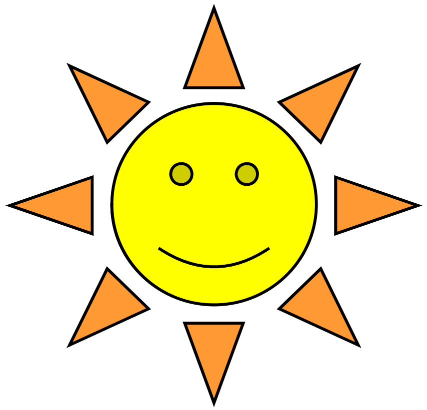
$$s^2 + 2 = 0 \quad \therefore s = \pm\sqrt{2}\,j$$

このとき分母＝0ではないので零点である

極は　分母＝0　とおいて

$$s^2 + 4s + 2 = 0 \quad \therefore s = -2 \pm \sqrt{2}$$

このとき分子＝0ではないので極である

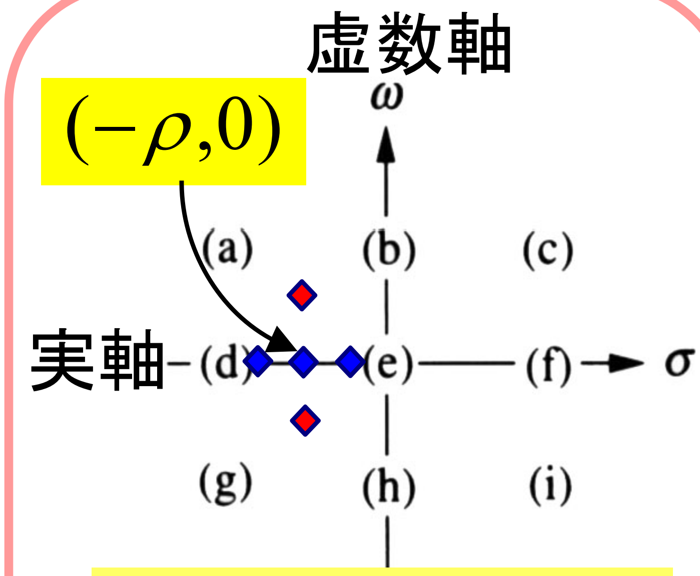


正 解

極が実根であるから、
過渡応答は減衰する指数関数となる

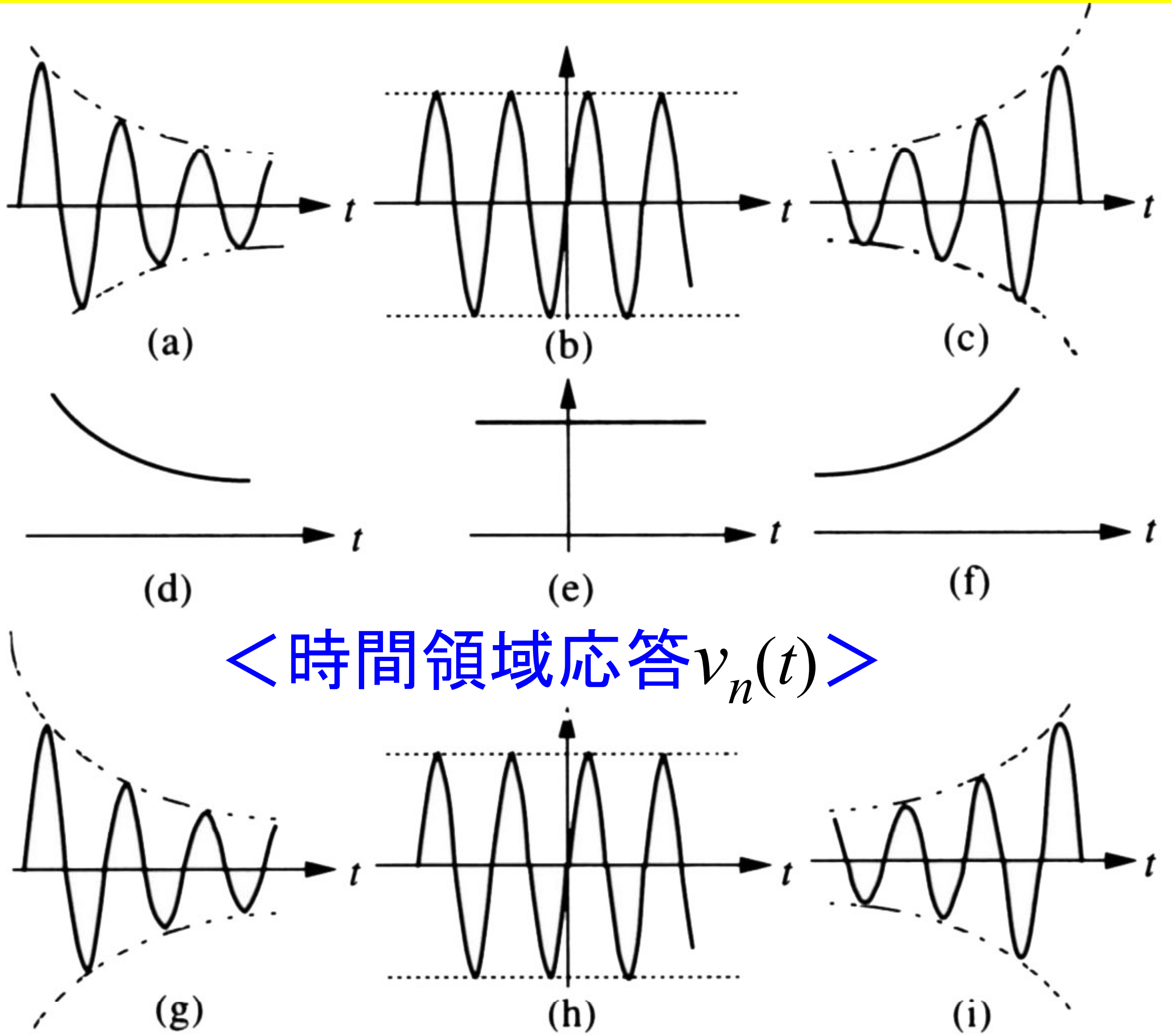
(参考) 以上を s 平面上に配置すると**根の位置**によって**固有応答**が異なる

第4回講義より



s 平面上の根の位置

図１の回路では $\rho = 0$ にはなりえないが、直列共振回路等ではありうる



＜時間領域応答 $v_n(t)$＞

通常の回路では $\rho > 0$ であり、(a), (d), (g) のいずれかで減衰するが、超伝導または負性抵抗を有する回路では $\rho \leqq 0$ となりうるため、(b), (c), (e), (f), (h), (i) となる場合がある

先週の講義のおさらい

回路網関数

回路網関数における駆動点関数、伝達関数は
入力、出力でカテゴリー別けされていた

へ から	入力（ポート1）	出力（ポート2）
入力（ポート1）	駆動点関数	伝達関数
出力（ポート2）	伝達関数	

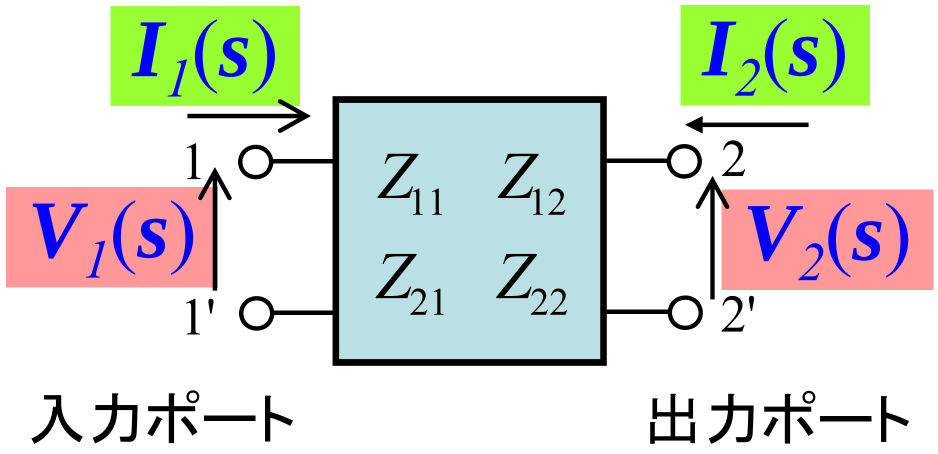
2ポート回路の行列表示とは

2ポート回路の電圧、電流の回路網関数における関係を
より一般化して行列表示したもの

から＼へ	ポート1	ポート2
ポート1	行列表示 インピーダンス行列　アドミタンス行列 縦続行列　ハイブリッド行列 散乱行列 →　目的により適当な行列を使い分け	
ポート2		

インピーダンス行列（Z行列）

$$
\left.\begin{aligned}
V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\
V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2
\end{aligned}\right\}
$$



$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
$$

Zパラメータ

$$
V = ZI \qquad Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0},\quad Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}
$$

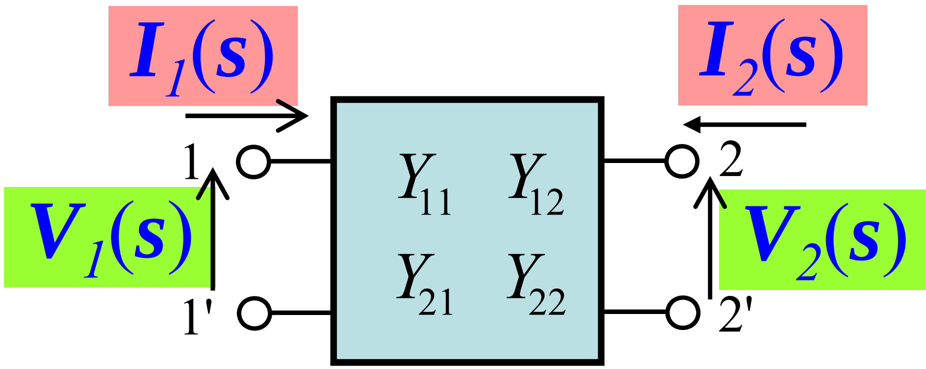
端子開放駆動点インピーダンス

$$
Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0},\quad Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}
$$

端子開放伝達インピーダンス

アドミタンス行列（Y行列）

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned}\right\}$$



入力ポート　　出力ポート

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Yパラメータ

$$I = YV \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}, \quad Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

端子短絡駆動点アドミタンス

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}, \quad Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

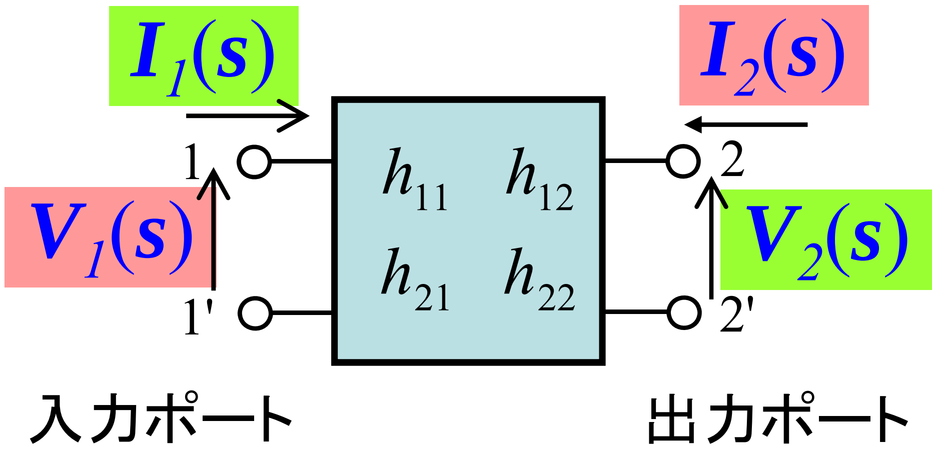
端子短絡伝達アドミタンス

ハイブリッド行列（H行列）

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

hパラメータ



$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}, \quad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}, \quad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

h_{11}：出力短絡入力インピーダンス

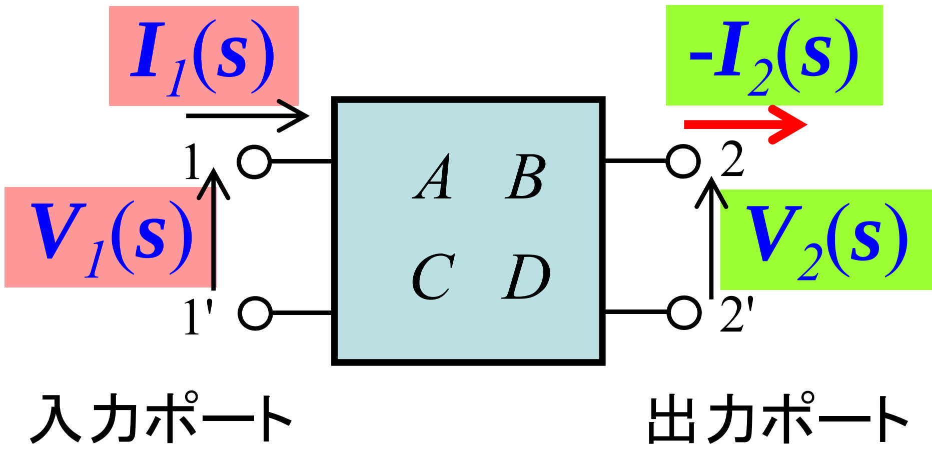
h_{12}：入力開放電圧帰還比

h_{21}：出力短絡電流伝達関数

h_{22}：入力開放出力アドミタンス

縦続行列（F行列）

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + B(-I_2) \\ I_1 &= CV_2 + D(-I_2) \end{aligned}\right\}$$



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Fパラメータ

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0}, \quad B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0}, \quad D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$

A：出力開放電圧帰還比

B：出力短絡伝達インピーダンス

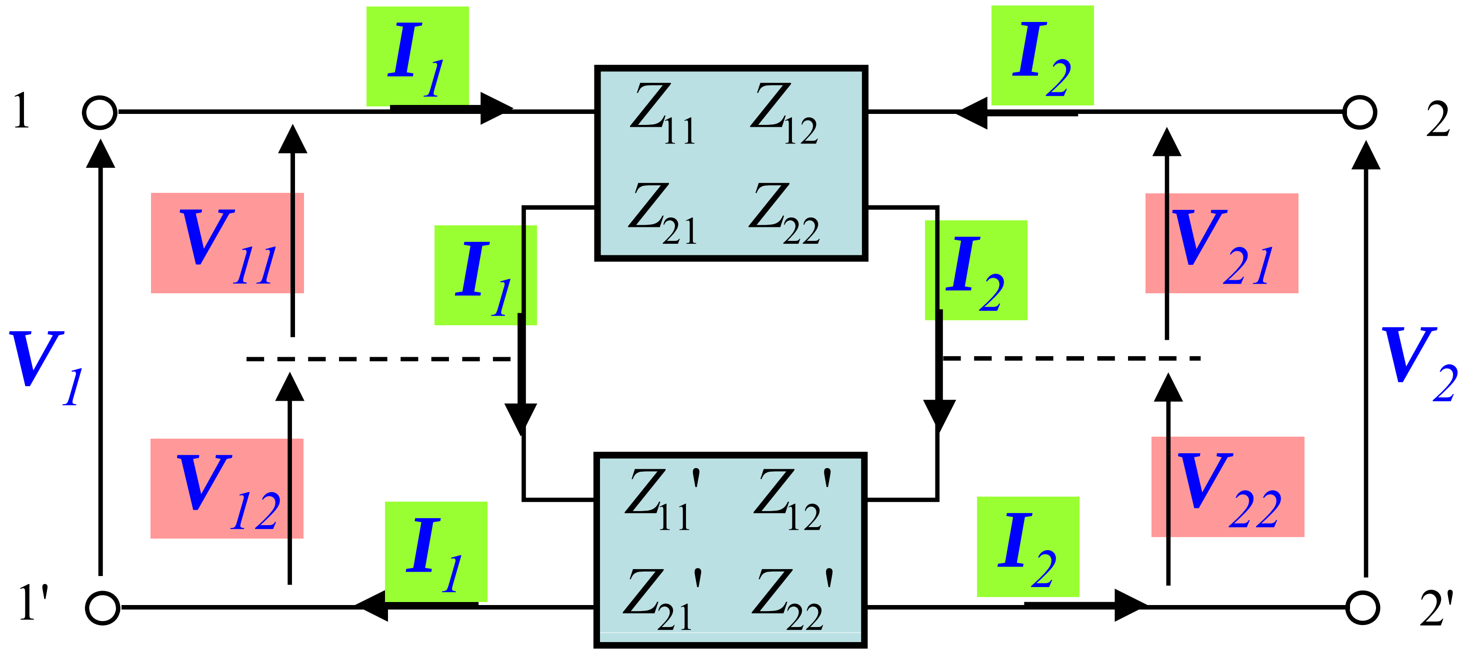
C：出力開放伝達アドミタンス

D：出力短絡電流帰還比

2ポート回路の行列表示（2）

2ポート回路の接続（1）

（1）直列接続 → Z 行列を用いると

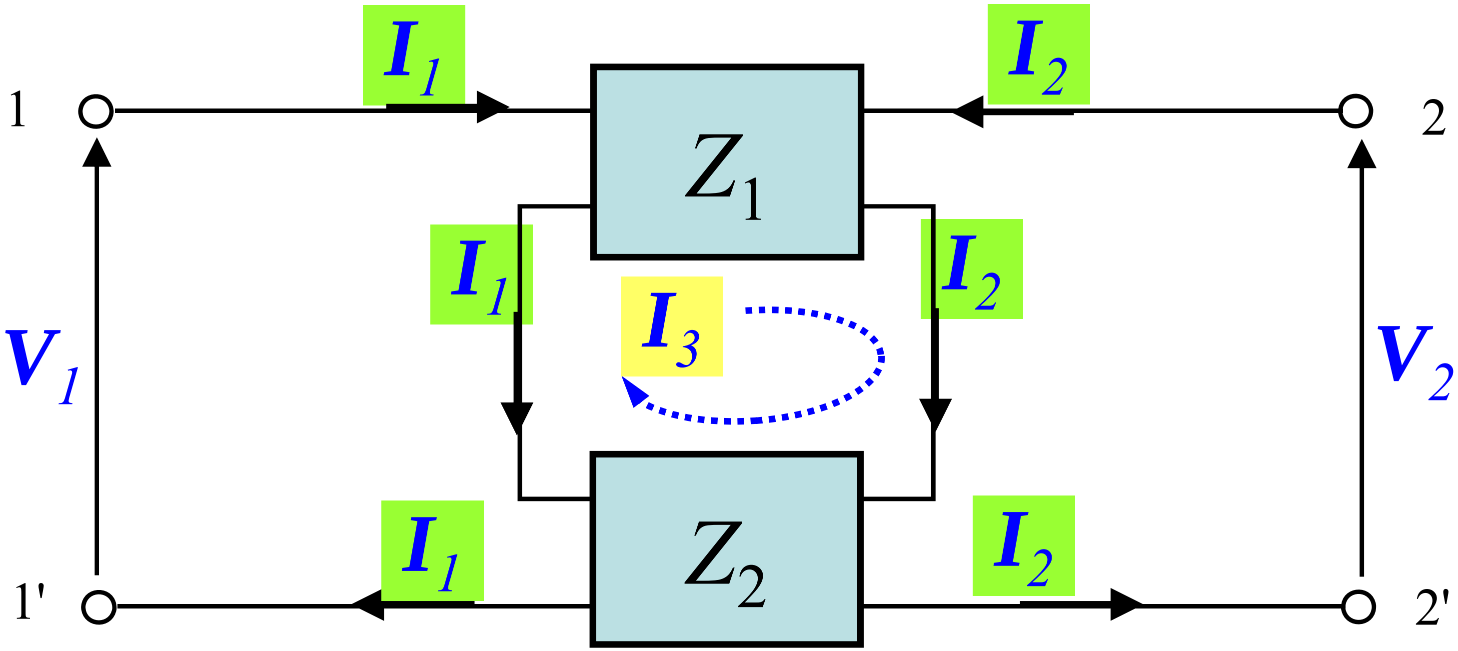


$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}+Z_{11}' & Z_{12}+Z_{12}' \\ Z_{21}+Z_{21}' & Z_{22}+Z_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

（続き）

直列接続で Z 行列を用いると

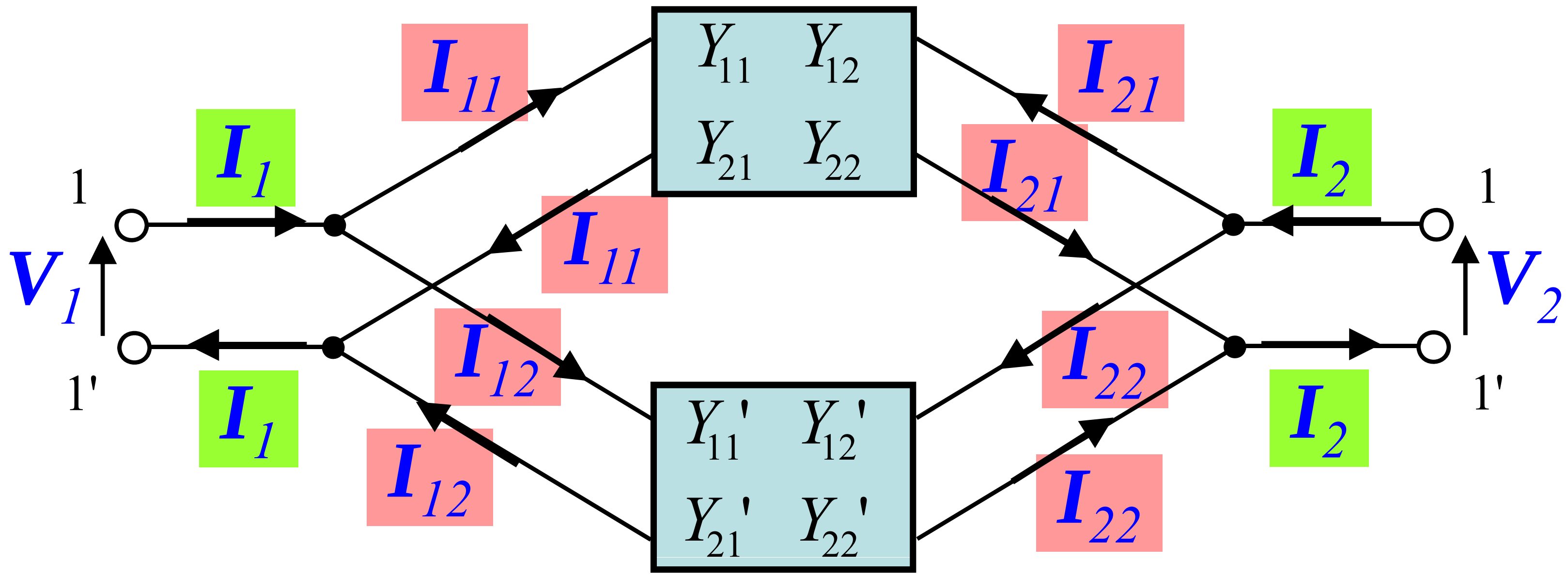
$$Z = Z_1 + Z_2$$



ただし、環状電流 I_3 が流れるときには上式は成り立たない

2ポート回路の接続(2)

(2) 並列接続 → Y 行列を用いると

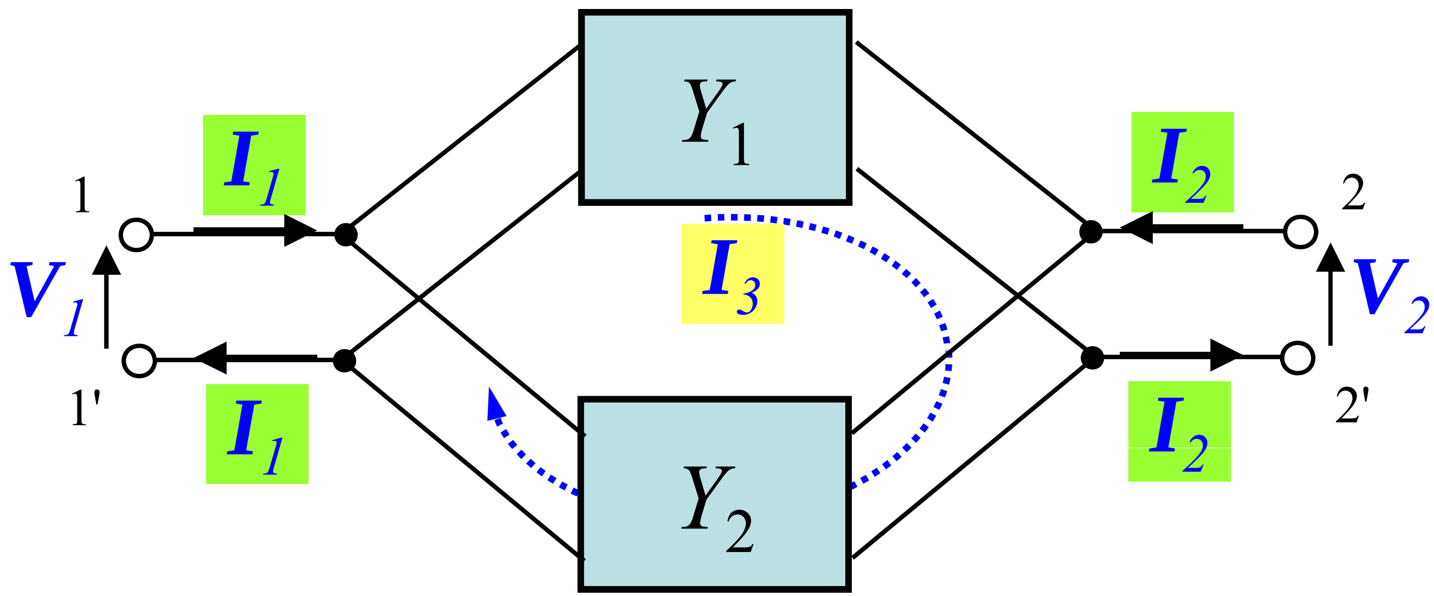


$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}+Y_{11}' & Y_{12}+Y_{12}' \\ Y_{21}+Y_{21}' & Y_{22}+Y_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

（続き）

並列接続で Y 行列を用いると

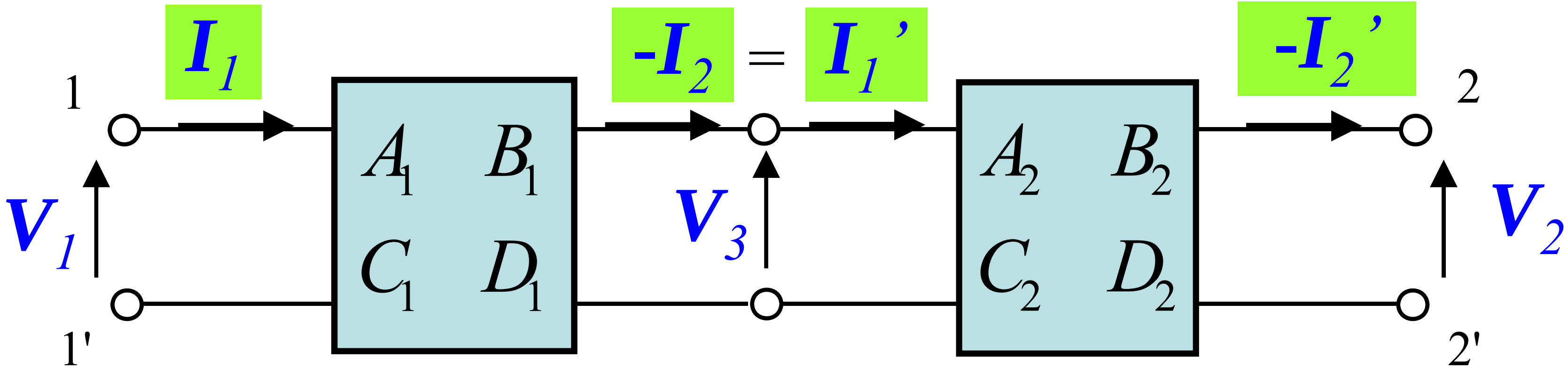
$$Y = Y_1 + Y_2$$



ただし、環状電流 I_3 が流れるときには上式は成り立たない

2ポート回路の接続(3)

(3) 縦続接続 ⇨ F 行列を用いると



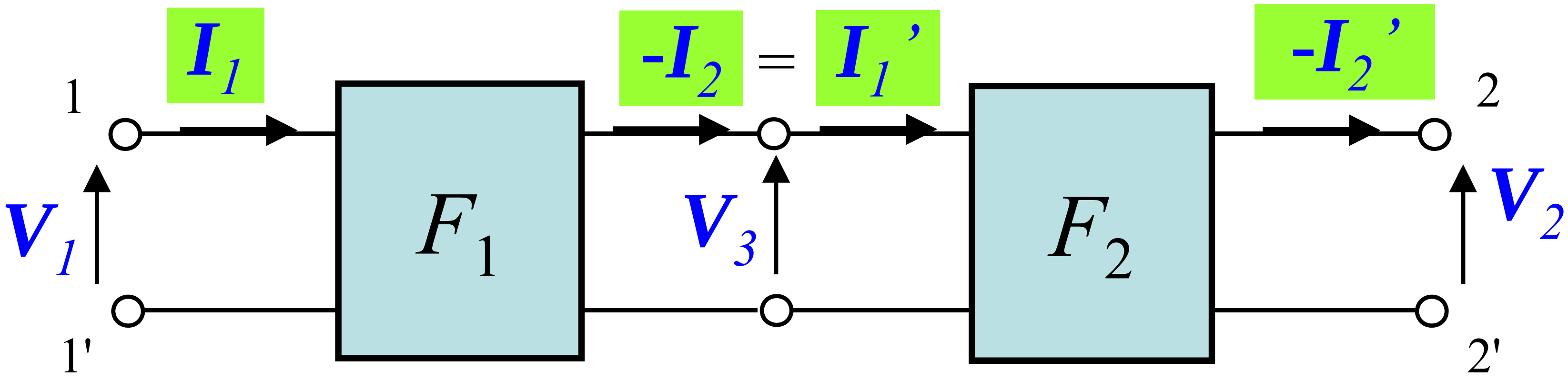
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix}$$

（続き）

縦続接続で F 行列を用いると

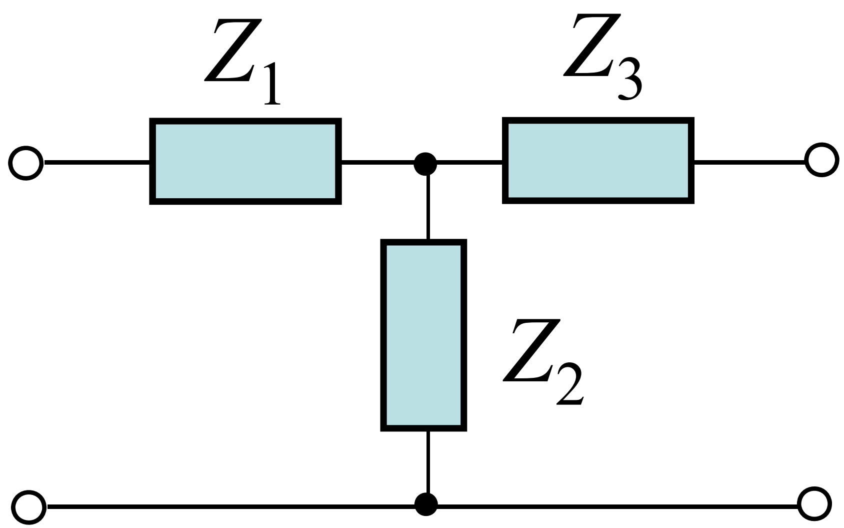
$$F = F_1 F_2$$



素子数の多い複雑な回路も、いくつかの部分回路の接続とすることでその回路網関数を行列計算から求めることができる

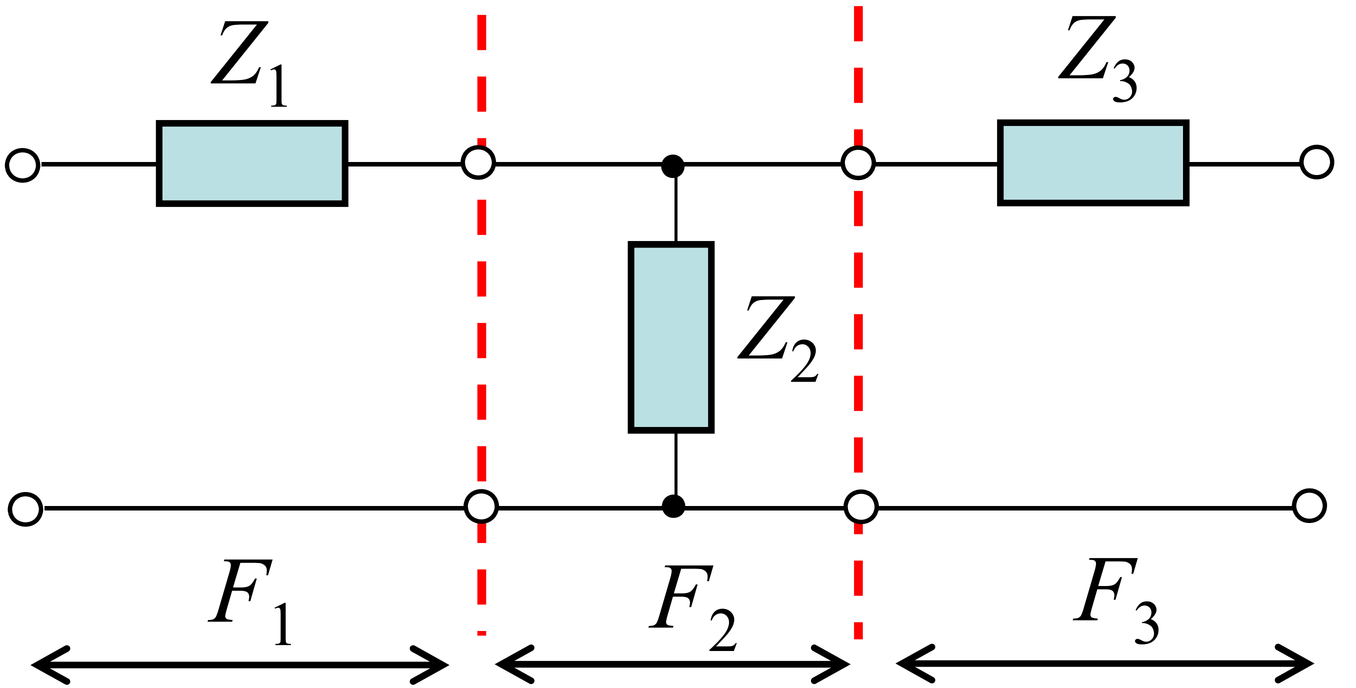
演習2.（2ポート回路）

（1）図のT形回路のF行列を、回路を分割することにより求めよ。



演習2.（2ポート回路）-解答

以下のように回路を3分割する。



$$F = F_1 F_2 F_3$$

（続き）

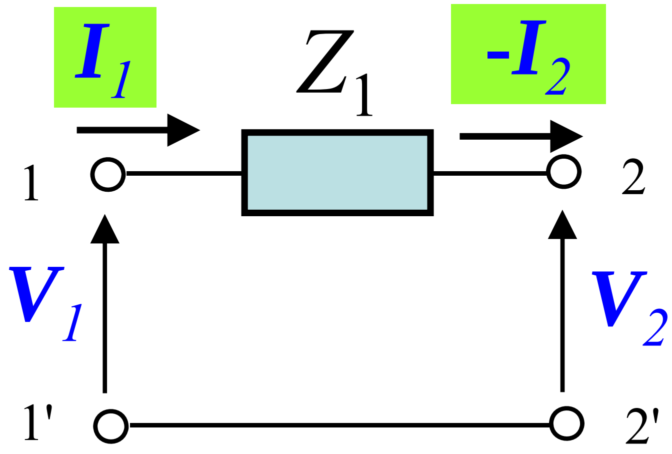
（a） 直列挿入素子による F 行列は

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = 1$$

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = Z_1$$

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = 0$$

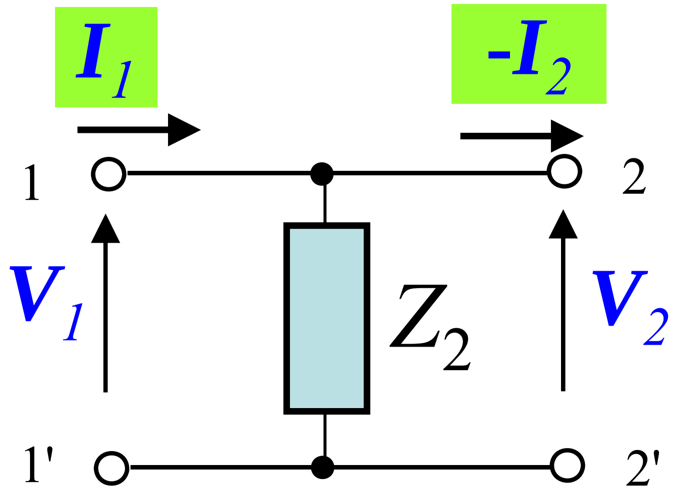
$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = 1$$



$$\therefore F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（続き）

（b）並列挿入素子による F 行列は



$$A = \frac{V_1}{V_2}\bigg|_{-I_2=0} = 1$$

$$B = \frac{V_1}{-I_2}\bigg|_{V_2=0} = 0$$

$$C = \frac{I_1}{V_2}\bigg|_{-I_2=0} = \frac{1}{Z_2}$$

$$D = \frac{I_1}{-I_2}\bigg|_{V_2=0} = 1$$

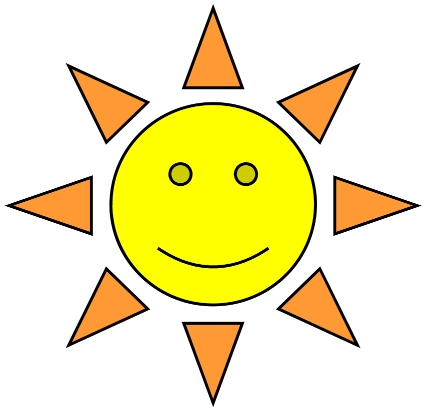
$$\therefore F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

（続き）

（c）よってT形回路のF 行列は

$$F=F_1F_2F_3=\begin{bmatrix}1 & Z_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{Z_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & Z_3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+\dfrac{Z_1}{Z_2} & Z_1+Z_3+\dfrac{Z_1Z_3}{Z_2}\\ \dfrac{1}{Z_2} & 1+\dfrac{Z_3}{Z_2}\end{bmatrix}$$



正 解

回路網行列間の関係（1）

2ポート回路の行列表示のまとめ(1)

	左辺	右辺
Z行列	V_1, V_2	I_1, I_2
Y行列	I_1, I_2	V_1, V_2
H行列	V_1, I_2	I_1, V_2
F行列	V_1, I_1	$V_2, -I_2$

2ポート回路行列間の関係(1)

Z, Y, H, F 行列の間には以下の関係がある

(1)Z 行列からその他の行列へ　Y行列の逆行列

$$Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{\det Y}\begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}=\frac{1}{C}\begin{bmatrix} A & \det F \\ 1 & D \end{bmatrix}=\frac{1}{h_{22}}\begin{bmatrix} \det H & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

(2)Y 行列からその他の行列へ　Z行列の逆行列

$$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{\det Z}\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}=\frac{1}{B}\begin{bmatrix} D & -\det F \\ -1 & A \end{bmatrix}=\frac{1}{h_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det H \end{bmatrix}$$

上記において

$$\det Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \qquad \det Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$$

$$\det H = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \qquad \det F = AD - BC$$

２ポート回路行列間の関係（２）

（３）H 行列からその他の行列へ

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{22}} \begin{bmatrix} \det Z & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{21} & \det Y \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & \det F \\ -1 & C \end{bmatrix}$$

（４）F 行列からその他の行列へ

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & \det Z \\ 1 & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{-1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} Y_{22} & 1 \\ \det Y & Y_{11} \end{bmatrix} = \frac{-1}{h_{21}} \begin{bmatrix} \det H & h_{11} \\ h_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

第2回レポート

（1）図1のT形回路のZ行列を求めよ。

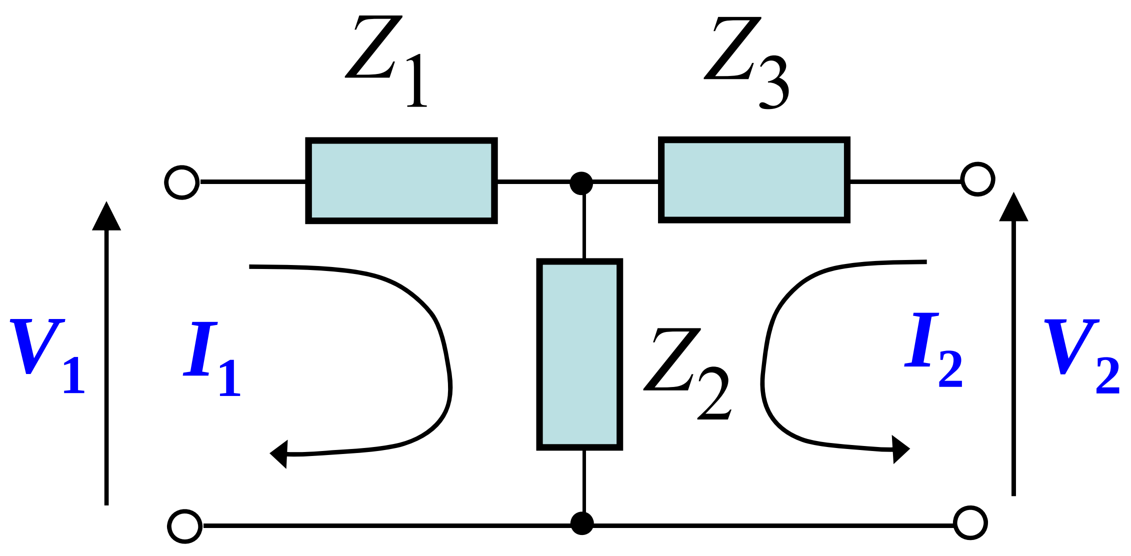


図1

（2）（1）で求めたZ行列からY行列を求めよ。

第2回レポート

（3）図2の π 形回路のY行列を求めよ。

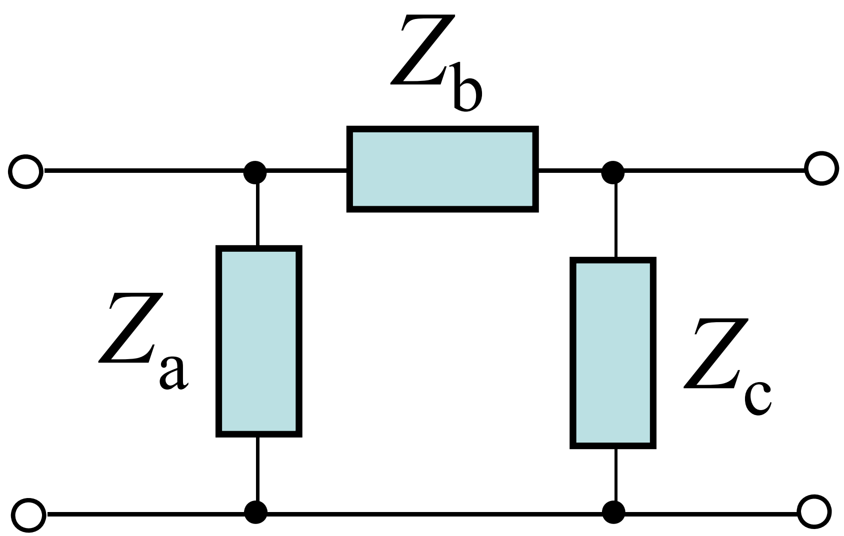


図2

第2回レポート

（４） 図1のT形回路と図２の π 形回路が等価である（行列パラメータが一致する）ためにインピーダンス Z_a, Z_b, Z_c がそれぞれ満たすべき条件（Z_1, Z_2, Z_3との関係）を求めよ。

提出用紙はA4用紙（縦）を使用し、学籍番号と氏名を各ページの上部に必ず記入すること。

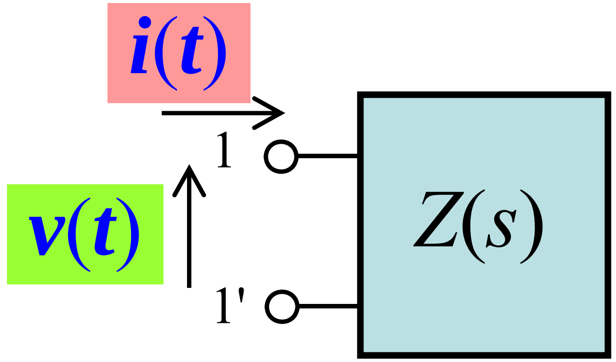
提出日；次回の授業（６月１７日）で提出してください。

2ポート回路の
入出力インピーダンス

回路網の入力インピーダンス

1ポート回路

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

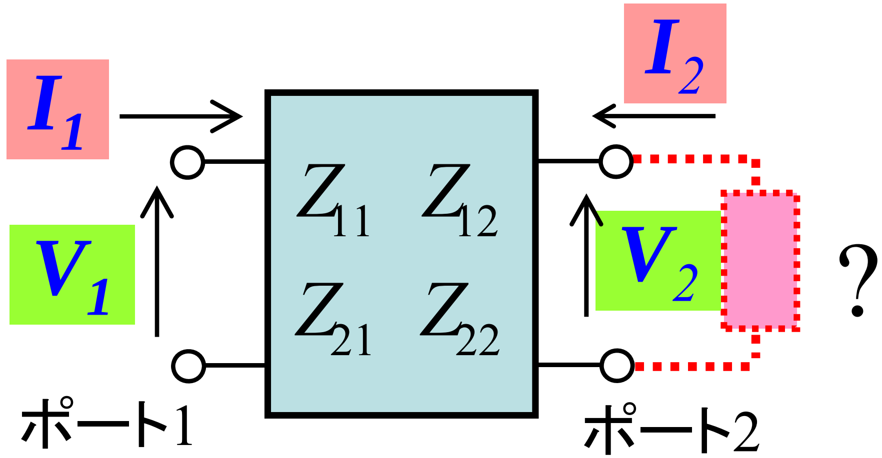


入力インピーダンス＝駆動点インピーダンス Z

2ポート回路

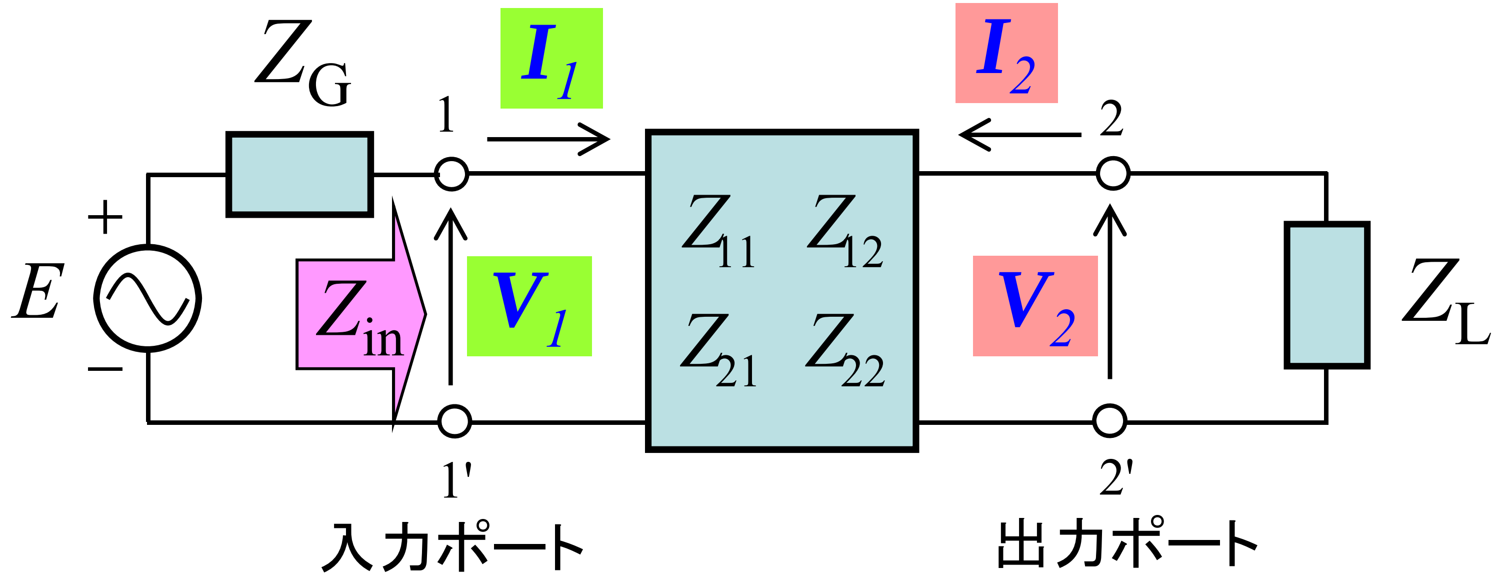
Z 行列

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned}\right\}$$



V_1 と I_1 の比はポート2に接続される素子に依存

2ポート回路の入力インピーダンス



ポート1に、内部インピーダンスZ_Gを有する電圧源 E を接続し、

ポート2に、負荷インピーダンスZ_L を接続し、負荷に電力を供給する場合、

「回路を Z_G とZ_L で終端する」 と言う

この場合、電源側から回路を見た入力インピーダンス Z_{in} は

（続き）

$$Z_{in} = \frac{1}{Y_{in}} = \frac{V_1}{I_1}$$

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$ から $$\frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12}\frac{I_2}{I_1}$$

Z行列の定義

一方、

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = -Z_L I_2 \qquad \therefore \frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}+Z_L}$$

したがって

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}+Z_L}$$

と表せ、

負荷 Z_L の影響で
入力インピーダンスは
見かけ上、小さくなる

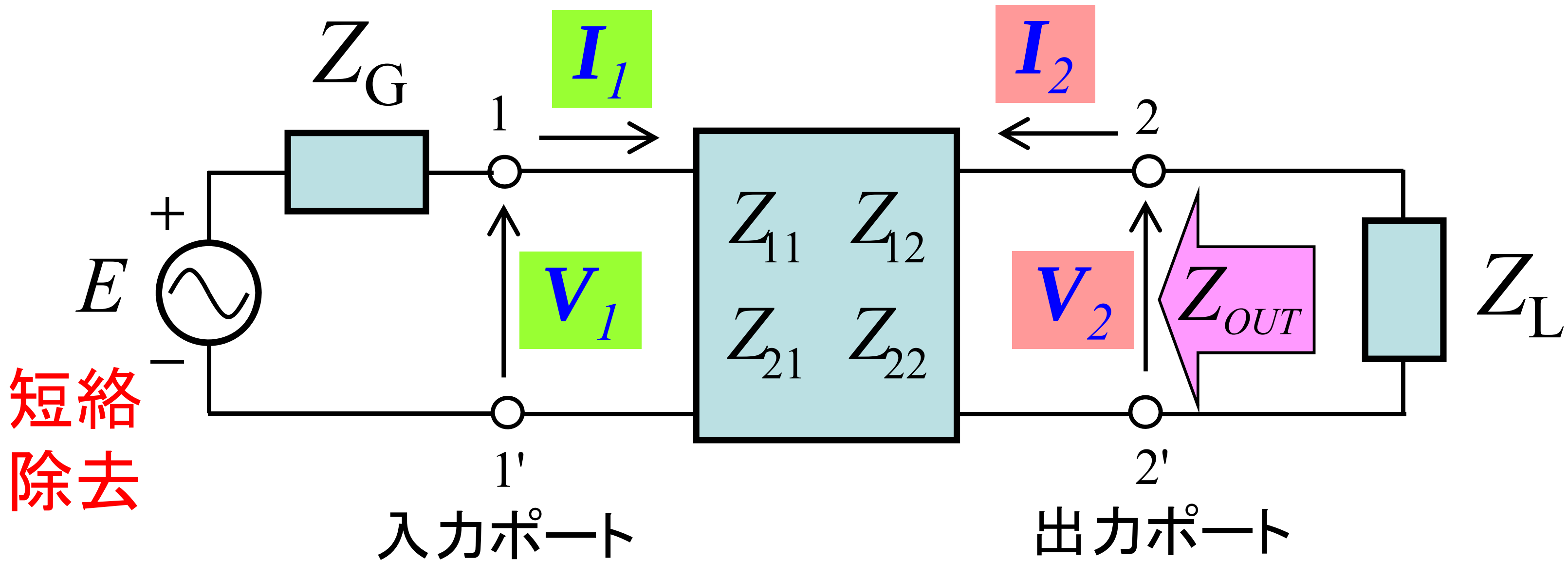
（続き）

同様にして　Y, h, Fパラメータとも　以下の関係がある

$$
\begin{cases}
Y_{in} = Y_{11} - \dfrac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_L} \\[2ex]
Z_{in} = h_{11} - \dfrac{h_{12}h_{21}}{h_{22} + Y_L} \\[2ex]
Z_{in} = \dfrac{1}{Y_{in}} = \dfrac{AZ_L + B}{CZ_L + D}
\end{cases}
$$

2ポート回路の出力インピーダンス

電圧源を短絡除去し、負荷側から回路を見た出力インピーダンス Z_{out} も同様にして求まる



$$Z_{out} = \frac{1}{Y_{out}} = \frac{V_2}{I_2}$$ より

$$\boxed{Z_{out} = Z_{22} - \frac{Z_{21}Z_{12}}{Z_{11} + Z_G}}$$

電源の内部インピーダンス Z_G の影響で、
出力インピーダンスは見かけ上、小さくなる

（続き）

同様にして Y, h, F パラメータとも　以下の関係がある

$$\begin{cases} Y_{out} = Y_{22} - \dfrac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{11} + Y_G} \\ Y_{out} = h_{22} - \dfrac{h_{21}h_{12}}{h_{11} + Z_G} \\ Z_{out} = \dfrac{1}{Y_{out}} = \dfrac{DZ_G + B}{CZ_G + A} \end{cases}$$