

回路・システム学第三 回路網関数(2)

2009.5.19

担当教官 山尾 泰

禁無断複製

Today's Menu

一、先週の講義のおさらい

式、回路関数(2)

複素周波数解析での過渡応答

参、同上

複素周波数解析での定常応答



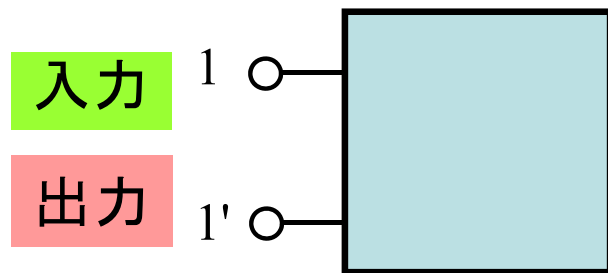
先週の講義のおさらい

回路網関数とは

ある回路の端子に外部から入力を加えた時の出力(応答)を調べる

↳ 回路の中の任意の接続点を導線で外部に引き出した端

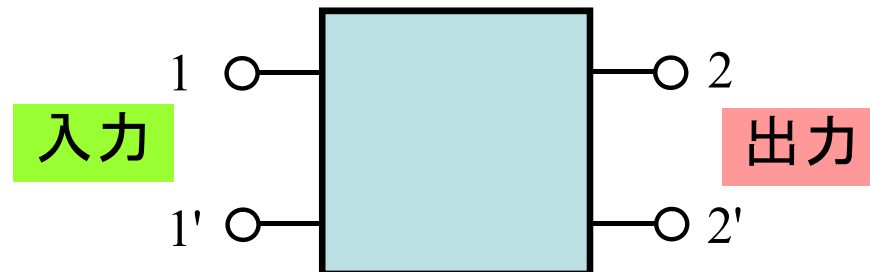
(1) 1端子対回路(1ポート回路)



1ポート回路の端子には、通常、電圧源や電流源が接続されるので、その端子を駆動点ともいう

駆動点関数

(2) 2端子対回路(2ポート回路)

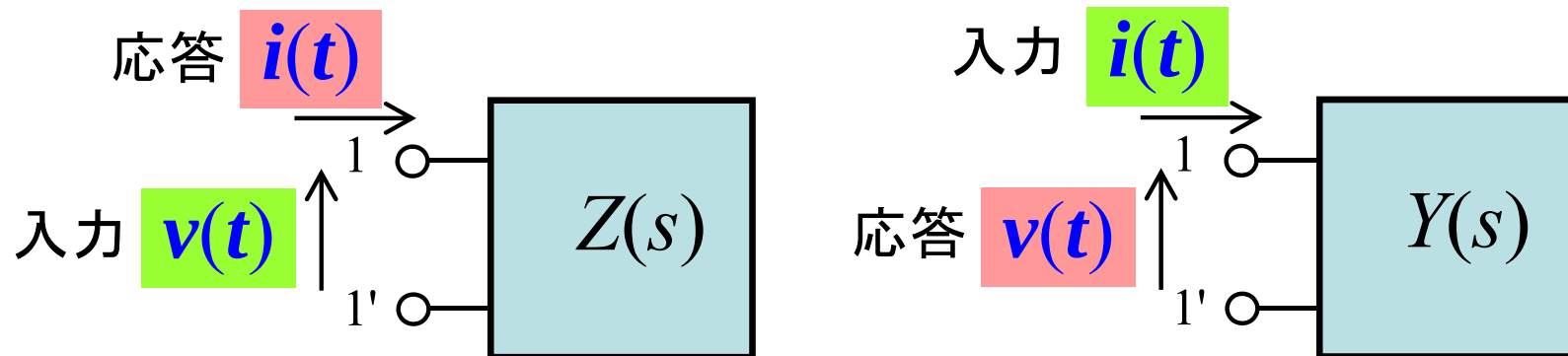


伝達関数

回路網関数

1ポート回路と駆動点関数

1ポート回路の端子に電圧や電流が入力された場合、その回路の応答は
入力電圧に対する電流、または入力電流に対する電圧である



それぞれのラプラス変換を $V(s)$, $I(s)$ とおくと、

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} \quad V(s) = \frac{I(s)}{Y(s)}$$

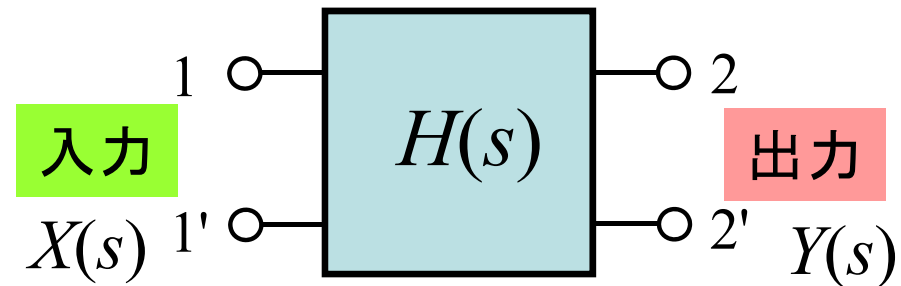
なる $Z(s)$ を入力インピーダンスまたは駆動点インピーダンス、
 $Y(s)$ を入力アドミタンスまたは駆動点アドミタンスといい、
 両者を総称して、**駆動点イミタンス**、または**駆動点関数**という

2ポート回路と伝達関数

2ポート回路では入力ポートと出力ポートが分離している

その回路の応答は、一般に入力のラプラス変換を $X(s)$ 、出力のラプラス変換を $Y(s)$ として、

$$Y(s) = H(s) X(s)$$

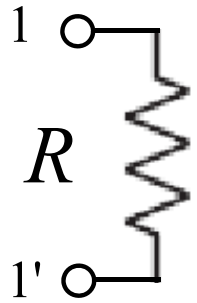


と書ける。ここで、入力、出力がそれぞれ

- (1) 入力: 電圧、出力: 電流 の場合、 $H(s)$ は 伝達アドミタンス
- (2) 入力: 電流、出力: 電圧 の場合、 $H(s)$ は 伝達インピーダンス
- (3) 入力／出力ともに電圧 の場合、 $H(s)$ は 電圧伝達関数
- (3) 入力／出力ともに電流 の場合、 $H(s)$ は 電流伝達関数

以上を総称して 伝達関数 という

基本回路素子の駆動点関数(1)

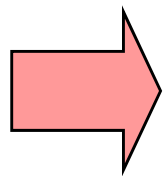


抵抗

駆動点インピーダンス $Z(s)$ は

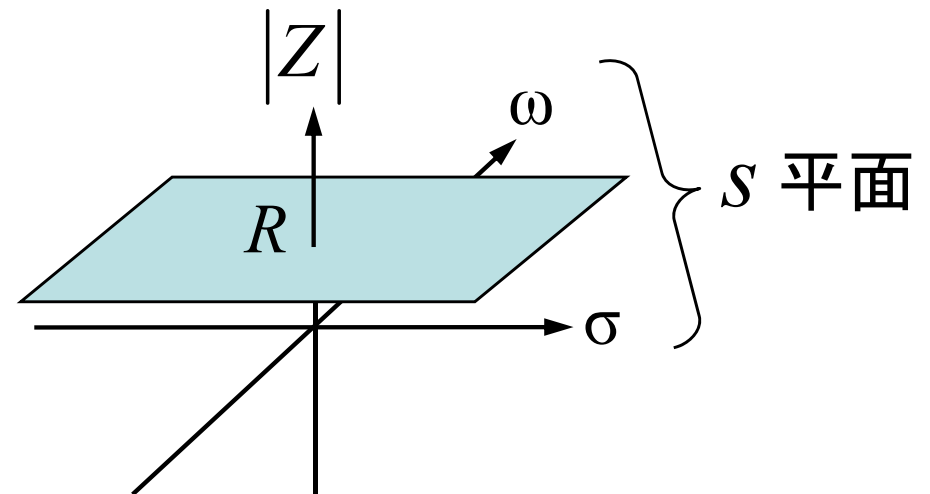
$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{\mathcal{L}[v(t)]}{\mathcal{L}[i(t)]} = \frac{R \mathcal{L}[i(t)]}{\mathcal{L}[i(t)]} = R$$

$Z(s)$ は $s = \sigma + j\omega$ によらない
実数 R となる

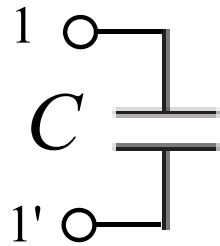


s に関して
周波数特性が平坦

$$|Z| = R$$



基本回路素子の駆動点関数(2)



コンデンサ

駆動点インピーダンス $Z(s)$ は

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{\mathcal{L}[v(t)]}{\mathcal{L}[i(t)]} = \frac{\mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt\right]}{I(s)}$$

$$\text{ここで } \mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt\right] = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \left(I(s) + \cancel{\int_{-\infty}^0 i(t) dt} \right)$$

であり、初期条件で $i(t) = 0 (t < 0)$ ならば積分項は0となる

したがって

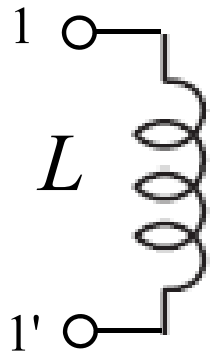
$$Z(s) = \frac{1}{Cs}$$

交流解析
では

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}} = \frac{1}{C\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$

基本回路素子の駆動点関数(3)



コイル

駆動点インピーダンス $Z(s)$ は

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{\mathcal{L}[v(t)]}{\mathcal{L}[i(t)]} = \frac{\mathcal{L}\left[L \frac{di(t)}{dt}\right]}{I(s)}$$

ここで $\mathcal{L}\left[L \frac{di(t)}{dt}\right] = L \cdot s(I(s) - i(0))$

であり、初期条件で $i(0) = 0$ とすると

$$Z(s) = Ls$$

交流解析
では

$$Z(\omega) = j\omega L$$

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}} = L\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

伝達関数の特徴

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad \text{において、}$$

(1) 伝達関数は回路の複素周波数領域での応答特性を決定する

(2) 任意の入力に対する出力を伝達関数から求めることができる

さらに入力 $x(t)$ が単位インパルス関数 $\delta(t)$ ならば、

そのラプラス変換 $X(s)$ は 1 となるので

$$Y(s) \Big|_{x=\delta} = H(s)$$

したがって

(3) 伝達関数 $H(s)$ はインパルス応答のラプラス変換である

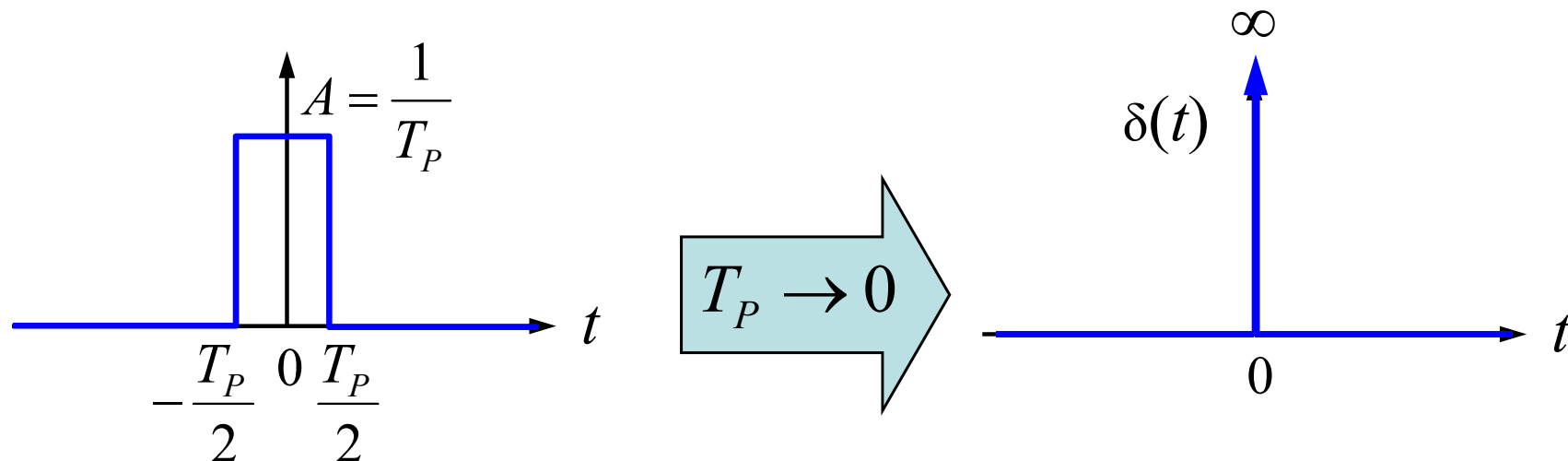
単位インパルス関数

単位インパルス関数 $\delta(t)$ は

$$\left. \begin{array}{l} \delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \\ \delta(t) \rightarrow +\infty, \quad t = 0 \end{array} \right\} \text{ かつ } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

を満たす概念上の関数である

この関数の説明としては、単一矩形パルスのパルス幅を、パルスの面積を1としたまま極限まで狭くしたもの、として言及されることが多い

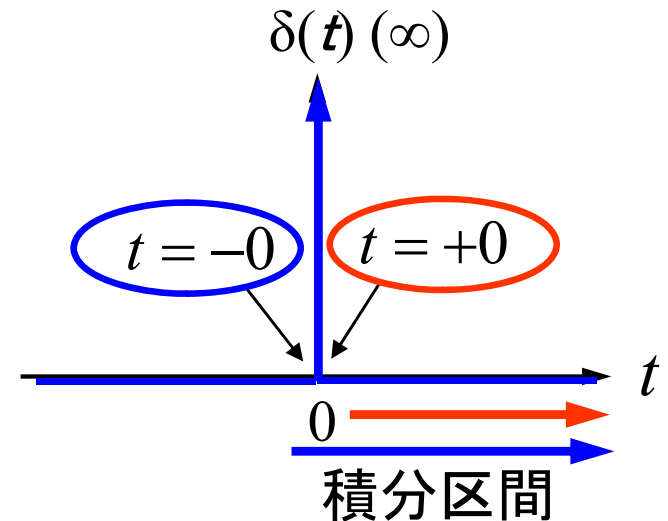


単位インパルス関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) dt$$

$$\mathcal{L}_{-0}[\delta(t)] = 1, \quad \cancel{\mathcal{L}_{+0}[\delta(t)] = 0}$$

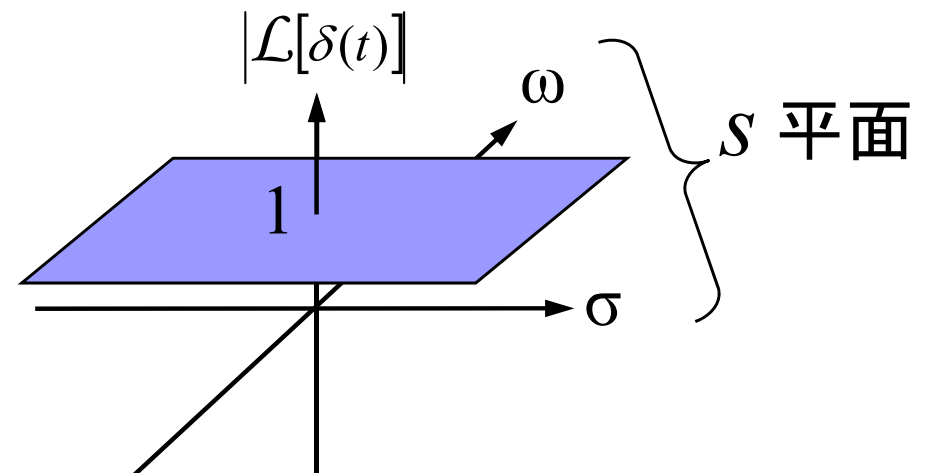
意味がない



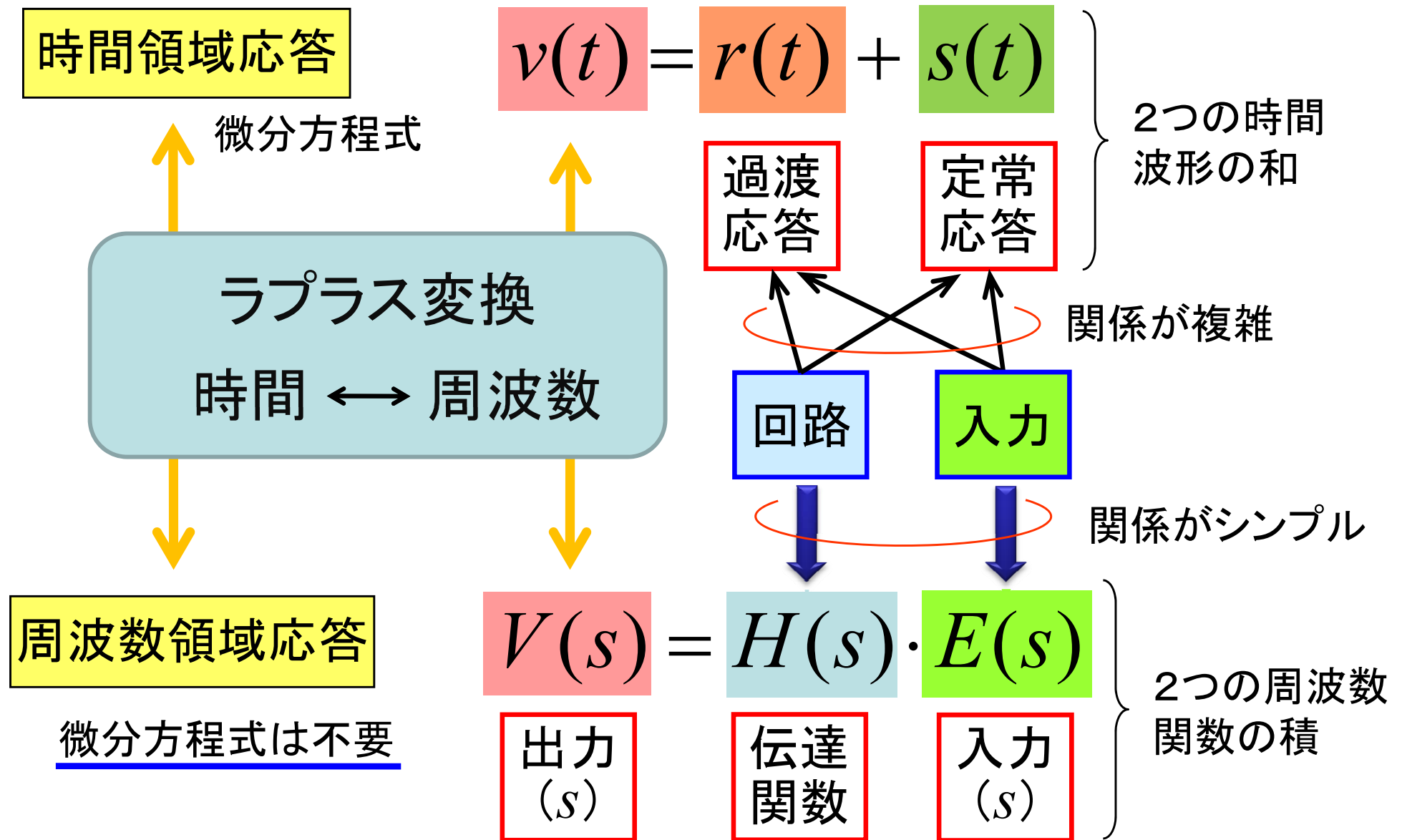
$\delta(t)$ のラプラス変換は、全ての s に対して値が1となる

したがって、入力が $\delta(t)$ の場合の回路応答（インパルス応答）のラプラス変換は、伝達関数そのものになる

$$Y(s) \Big|_{x=\delta} = H(s)$$



時間領域応答と周波数領域応答



時間領域での回路の応答

回路の応答とは？

過渡応答

+

定常応答

(ω_n)

(ω_i)

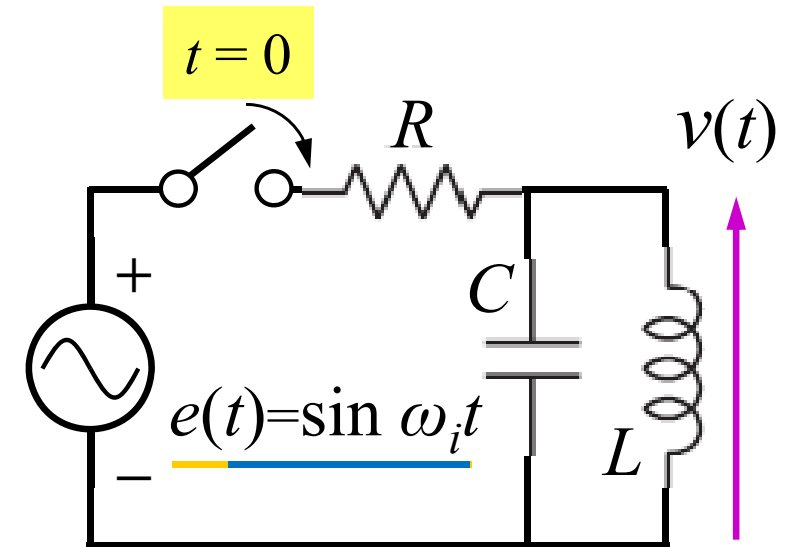
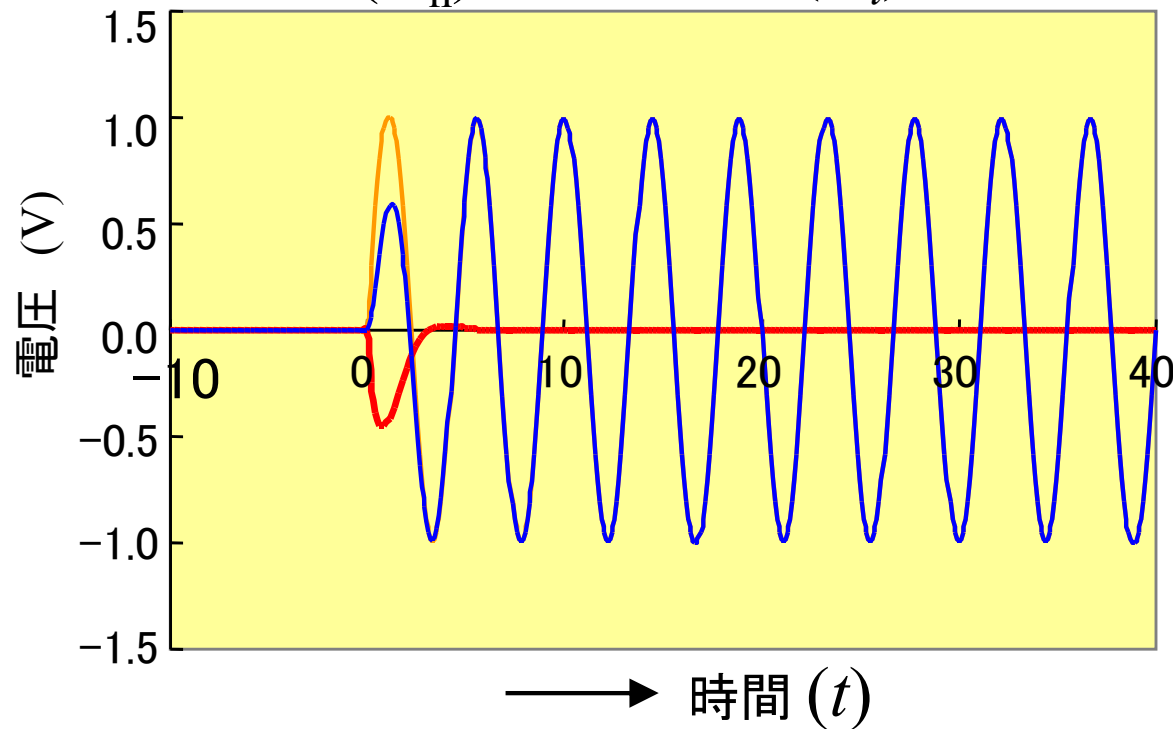
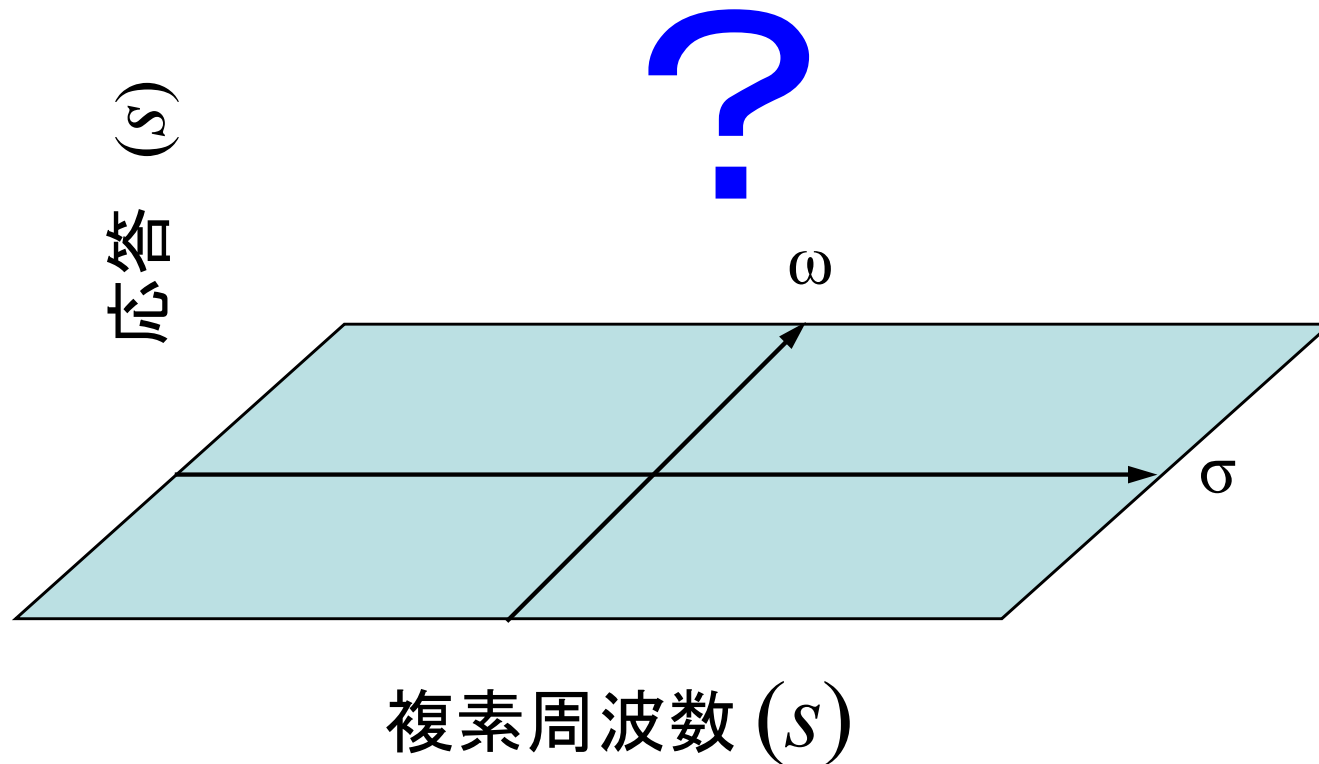


図1の回路

時間応答波形から両者の回路応答の解析ができた

複素周波数領域での解析(2)

では複素周波数領域での回路応答(定常応答と過渡応答)はどのように表されるのか？



回路網関数(2)

(1) 複素周波数解析での過渡応答

回路網関数と回路の応答

回路の応答とは？

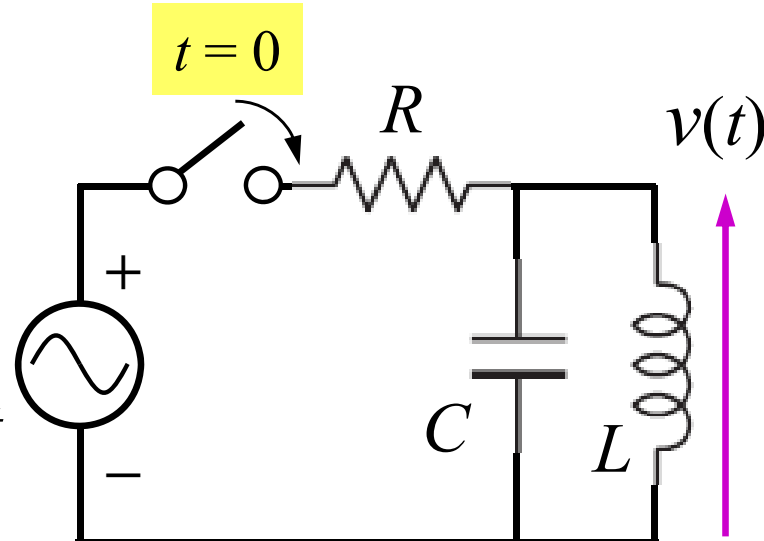
伝達関数 $H(s)$ 入力関数 $E(s)$

応答 $V(s) = \frac{2\rho s}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2} \cdot \frac{\omega_i}{s^2 + \omega_i^2} = \frac{K_2}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2} + \frac{K_1}{s^2 + \omega_i^2}$

$V_n(s)$ $V_f(s)$

回路固有の過渡応答項 入力信号による強制(定常)応答項

(1) (2)



複素周波数解析での回路応答(1)

図1の回路の出力 $v(t)$ を一般形で求めてみよう

もちろん入力 $e(t) = \sin \omega_i t$ は同じとする

$s = \sigma + j\omega$ の ω と区別する

時刻 $t \geq 0$ において、
端子電圧 $v(t)$ に成り立つ回路方程式は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} - RC \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{R}{L} v$$

これを微分次数順に整理すると

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt} = \frac{1}{RC} \omega_i \cos \omega_i t$$

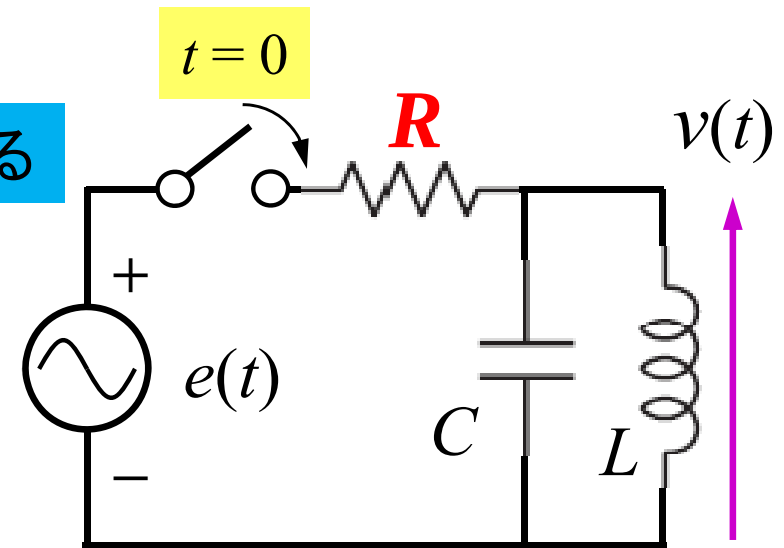


図1の回路

(続き)

これをラプラス変換すると

$$s^2 V(s) + \frac{1}{RC} s V(s) + \frac{1}{LC} V(s) = \frac{1}{RC} \omega_i \left(\frac{s}{s^2 + \omega_i^2} \right)$$

ここで $\rho = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ とおくと

$$V(s) = \frac{2\rho\omega_i s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + 2\rho s + \omega_0^2)} = \underbrace{\frac{K_1}{s^2 + \omega_i^2}}_{V_f(s)} + \underbrace{\frac{K_2}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}}_{V_n(s)}$$

ここで、 L, C を固定して R を変化させよう入力信号による
強制応答項回路固有の
過渡応答項すると ρ が変化し、右辺第2項の回路固有の過渡応答項が変化するその応答は、**分母の根** s_1, s_2 の性質に依存する すなわち、

(続き)

(1) **実根**の場合 ($\rho > \omega_0$) $s_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} < 0$ であり

時間領域応答 $v_n(t)$ は $v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$

(2) **重根**の場合 ($\rho = \omega_0$) $s_{1,2} = -\rho < 0$ であり

時間領域応答 $v_n(t)$ は $v_n(t) = (At + B)e^{-\rho t}$

(3) **複素共役根**の場合 ($\rho < \omega_0$) $s_{1,2} = -\rho \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ であり

時間領域応答 $v_n(t)$ は

$$v_n(t) = e^{-\rho t} \left(A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t\right) \right)$$



固有振動の発生

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$$

回路の固有周波数
または自然周波数

(続き)

以上から s 平面上の**根の位置**によって**固有応答**が異なる

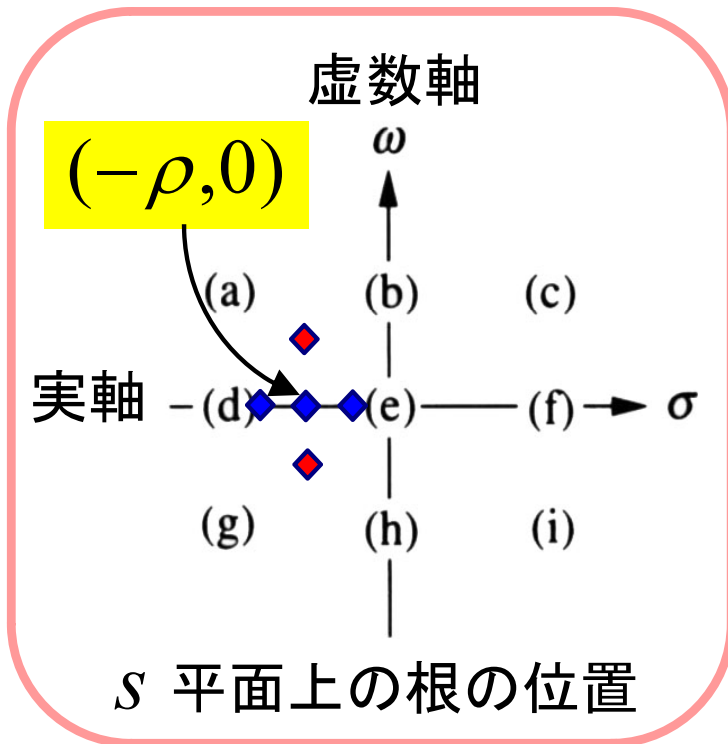
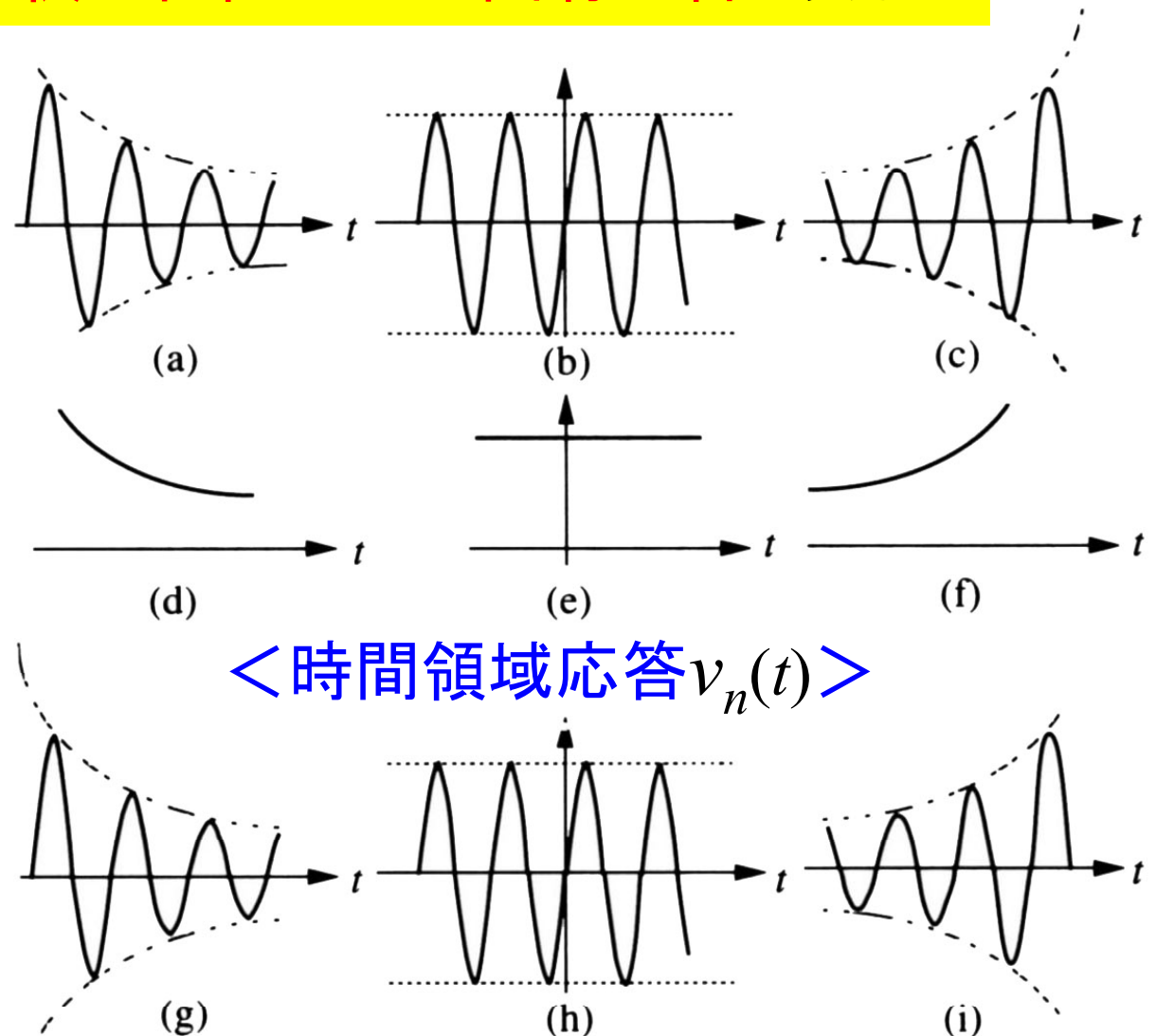


図1の回路では $\rho = 0$ にはなりえないが、直列共振回路等ではありうる



通常の回路では $\rho > 0$ であり、(a), (d), (g) のいずれかで減衰するが、超伝導または負性抵抗を有する回路では $\rho \leq 0$ となりうるため、(b), (c), (e), (f), (h), (i) となる場合がある

(続き) ここで応答を**伝達関数**で表すと

$$V(s) = \frac{2\rho\omega_i s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + 2\rho s + \omega_0^2)} = \underbrace{\frac{2\rho s}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}}_{\text{伝達関数}} \cdot \underbrace{\frac{\omega_i}{s^2 + \omega_i^2}}_{\text{入力信号のラプラス変換}}$$

固有応答の性質を決定する過渡応答項の分母は伝達関数の分母である

一般にラプラス変換において、

$F(s) \rightarrow \infty$ となる s_i を**極**、 $F(s) \rightarrow 0$ となる s_j を**零点** という

伝達関数の分母を0にする s_i があれば**極**、分子を0にする s_j があれば**零点** となりうる

伝達関数の極(分母の根)を調べることで、回路の固有応答を知ることができる

図1の回路の伝達関数の s 平面での表示の例

$$H(s) = \frac{2\rho s}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2} \quad \therefore |H(s)| = \frac{2\rho|s|}{|s^2 + 2\rho s + \omega_0^2|}$$

$s = \sigma + j\omega$ を代入すると

$$|H(s)| = 2 \sqrt{\frac{\sigma^2 + \omega^2}{\left\{(\sigma+1)^2 - \omega^2 + 1\right\}^2 + 4\omega^2(\sigma+1)^2}}$$

例) $\rho = \frac{1}{2RC} = 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}$ の場合、極は複素共役根

これを s 平面上に表示すると

図1の回路の伝達関数例

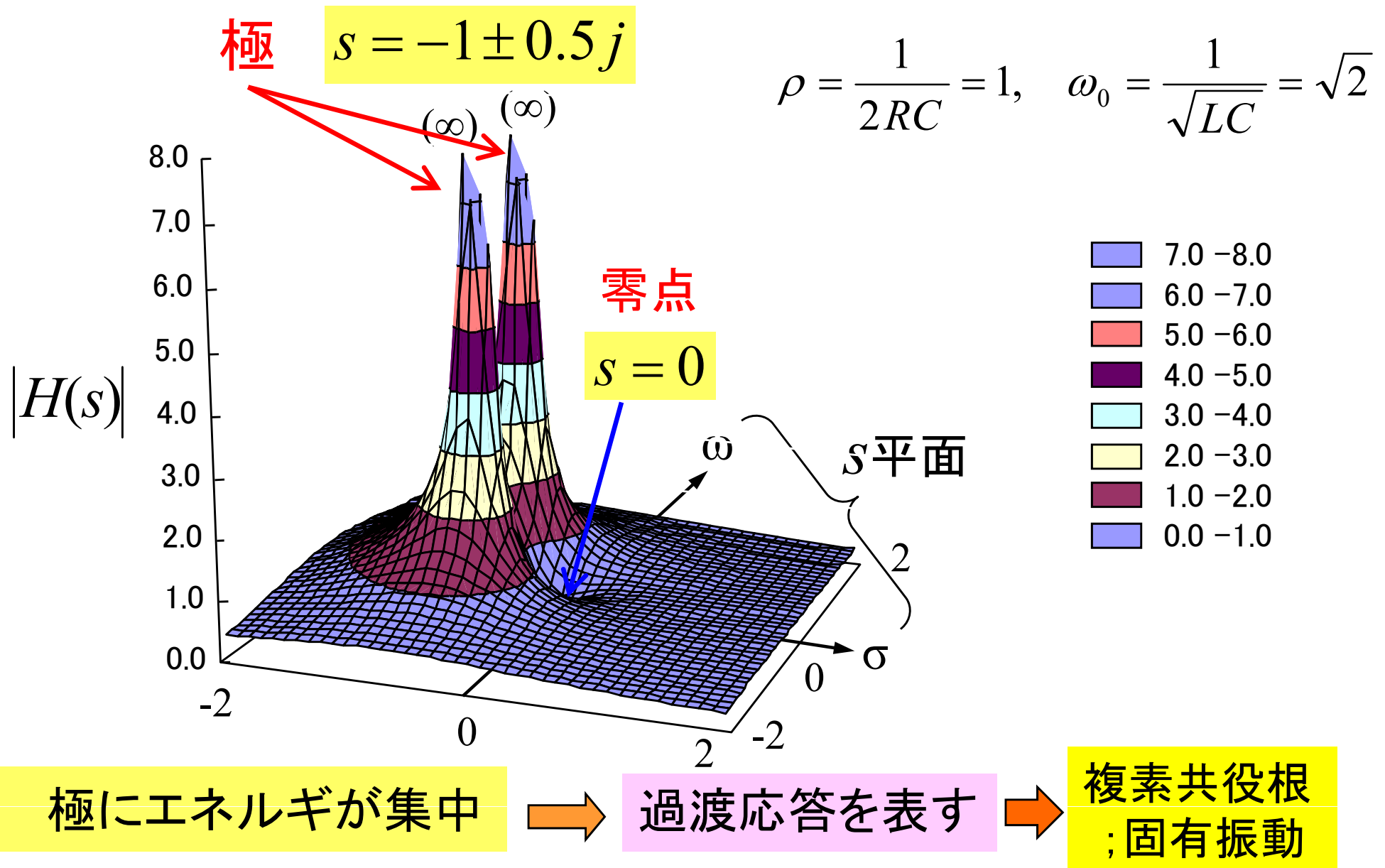
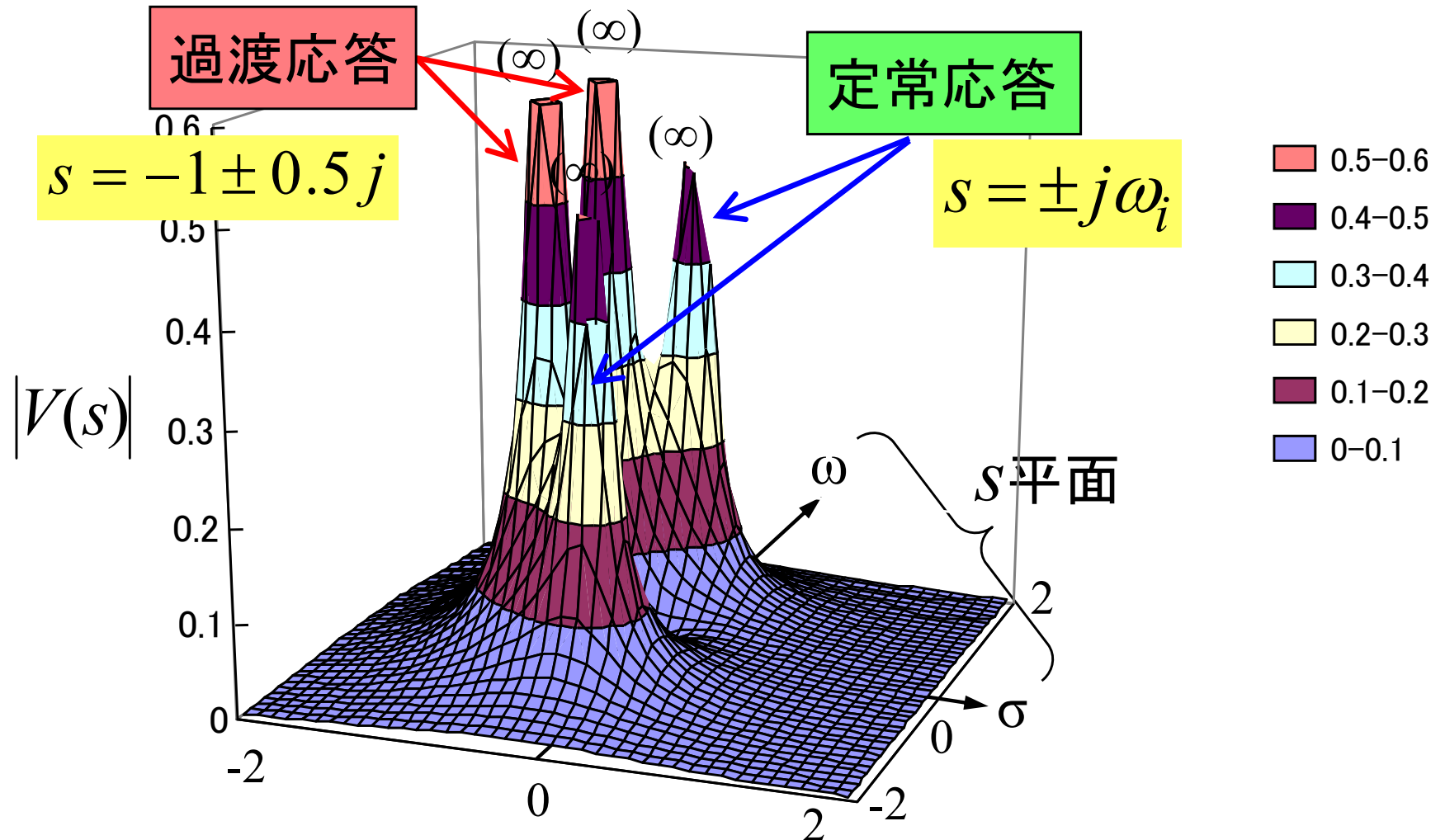


図1の回路の正弦波入力応答

$$V(s) = H(s)E(s)$$



(2) 複素周波数解析での定常応答

伝達関数と定常応答

引き続き図1の回路で定常応答(強制応答)について調べよう

$$V(s) = \frac{2\rho\omega_i s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + 2\rho s + \omega_0^2)} = \frac{K_1}{s^2 + \omega_i^2} + \frac{K_2}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}$$

ただし $\rho = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

入力信号による
強制応答項

$$V_f(s)$$

回路固有の
過渡応答項

$$V_n(s)$$

$V_f(s)$ について調べよう

分母の根(極)が共役複素数 $s_{1,2} = \pm j\omega_i$ となることから、この応答は

$$v_f(t) = 2(A_R \cos \omega_i t + A_I \sin \omega_i t) \quad \text{となる(複素共役根で}\rho=0\text{)}$$

係数 A_R , A_I は極 $s_{1,2}$ に対する $V(s)$ の留数 $\alpha_{1,2}$ の実部、虚部である

(続き)

$V(s)$ の留数 $\alpha_{1,2}$ は極 $s_{1,2}$ に対する $1/V(s)$ の微係数の逆数に等しく

$$\alpha_i = \left. \frac{1}{\frac{d(1/V(s))}{ds}} \right|_{s=s_i} = \left. \frac{N(s)}{\frac{dD(s)}{ds}} \right|_{s=s_i} \quad \text{ただし } V(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \text{ とする}$$

図1の場合、

$$\begin{cases} \frac{dD(s)}{ds} = \frac{d}{ds}[(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + 2\rho s + \omega_0^2)] = 4s^3 + 6\rho s^2 + 2(\omega_0^2 + \omega_i^2)s + 2\rho\omega_i^2 \\ N(s) = 2\rho\omega_i s \end{cases}$$

$s_{1,2} = \pm j\omega_i$ を代入すると

$$\alpha_{1,2} = \frac{2\rho\omega_i(\pm j\omega_i)}{-4\rho\omega_i^2 \mp j2\omega_i(\omega_i^2 - \omega_0^2)} = \frac{\mp \{ \rho\omega_i(\omega_i^2 - \omega_0^2) + j2\rho^2\omega_i^2 \}}{4\rho^2\omega_i^2 + (\omega_i^2 - \omega_0^2)^2}$$

(続き)

$$\therefore \begin{cases} A_R = \operatorname{Re}[\alpha_{1,2}] = \frac{\mp \rho \omega_i (\omega_i^2 - \omega_0^2)}{4\rho^2 \omega_i^2 + (\omega_i^2 - \omega_0^2)^2} \\ A_I = \operatorname{Im}[\alpha_{1,2}] = \frac{\mp 2\rho^2 \omega_i}{4\rho^2 \omega_i^2 + (\omega_i^2 - \omega_0^2)^2} \end{cases}$$

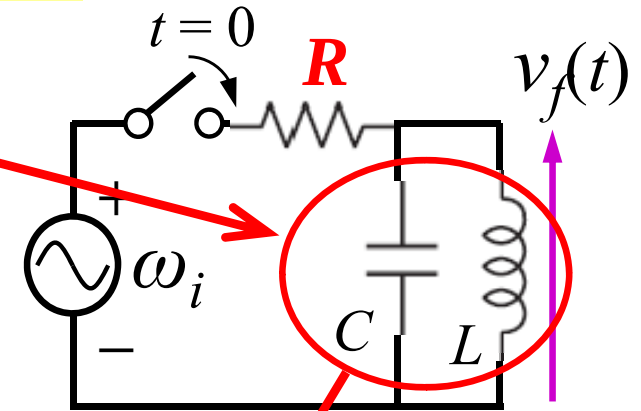
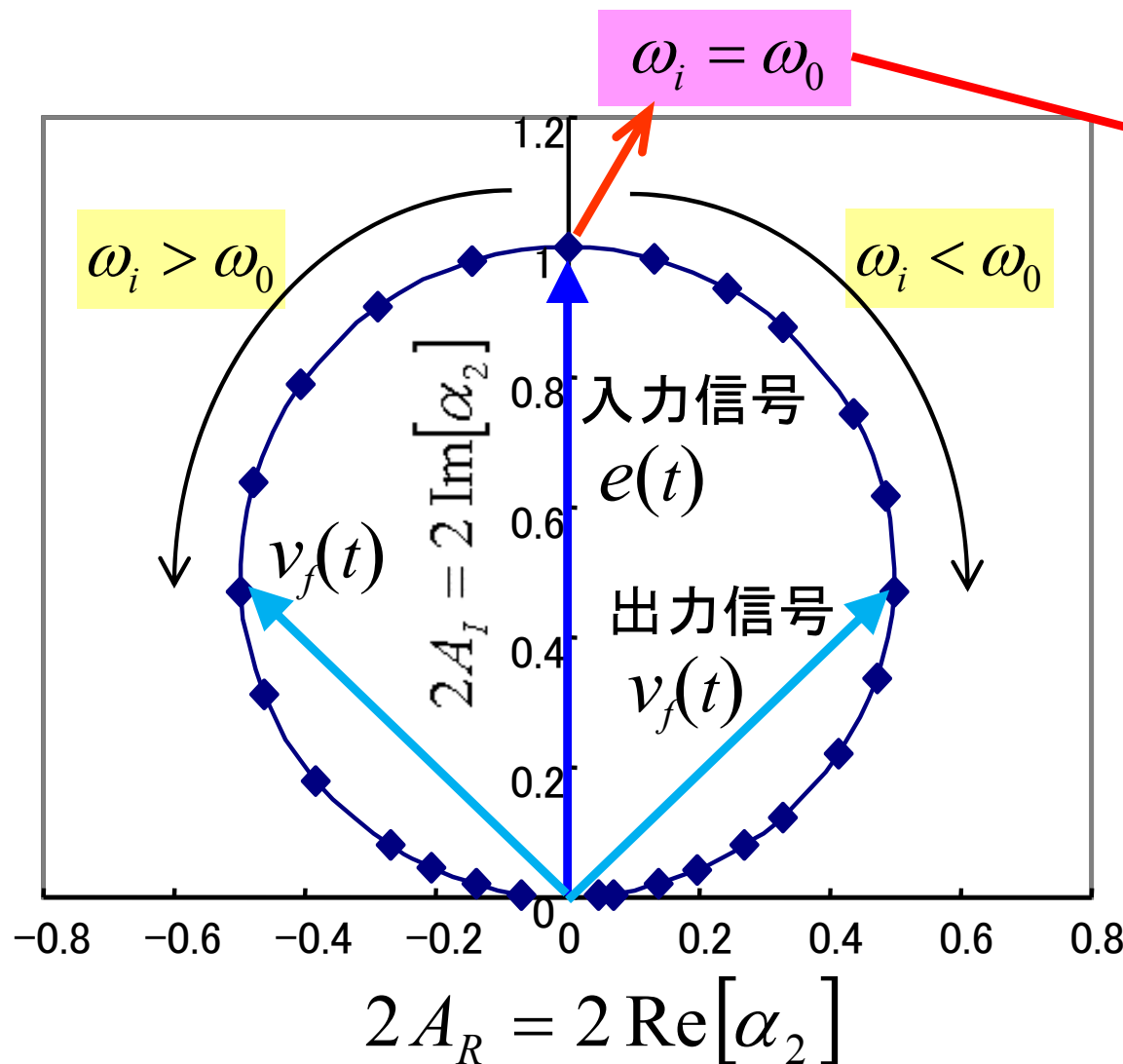
入力信号による
定常応答は

$$\begin{aligned} v_f(t) &= 2(A_R \cos \omega_i t + A_I \sin \omega_i t) \\ &= A \sin(\omega_i t + \phi) \quad [\text{極座標表示}] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\sqrt{A_R^2 + A_I^2} = \frac{2\rho\omega_i}{\sqrt{4\rho^2\omega_i^2 + (\omega_i^2 - \omega_0^2)^2}} \\ \phi &= \tan^{-1}(A_R/A_I) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_i^2 - \omega_0^2}{2\rho\omega_i}\right) \end{aligned} \right\} (A_R, A_I) \text{ 平面で } \\ \text{振幅を見てみよう}$$

図1の回路の定常応答の角周波特性(1)

ω_i に対する $v_f(t)$ のベクトル軌跡をフェーザ表示すると、

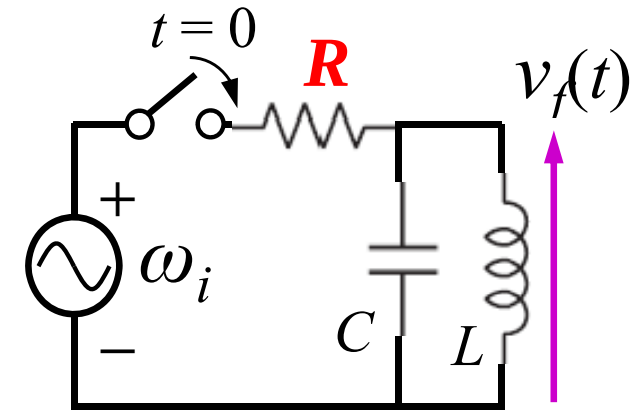
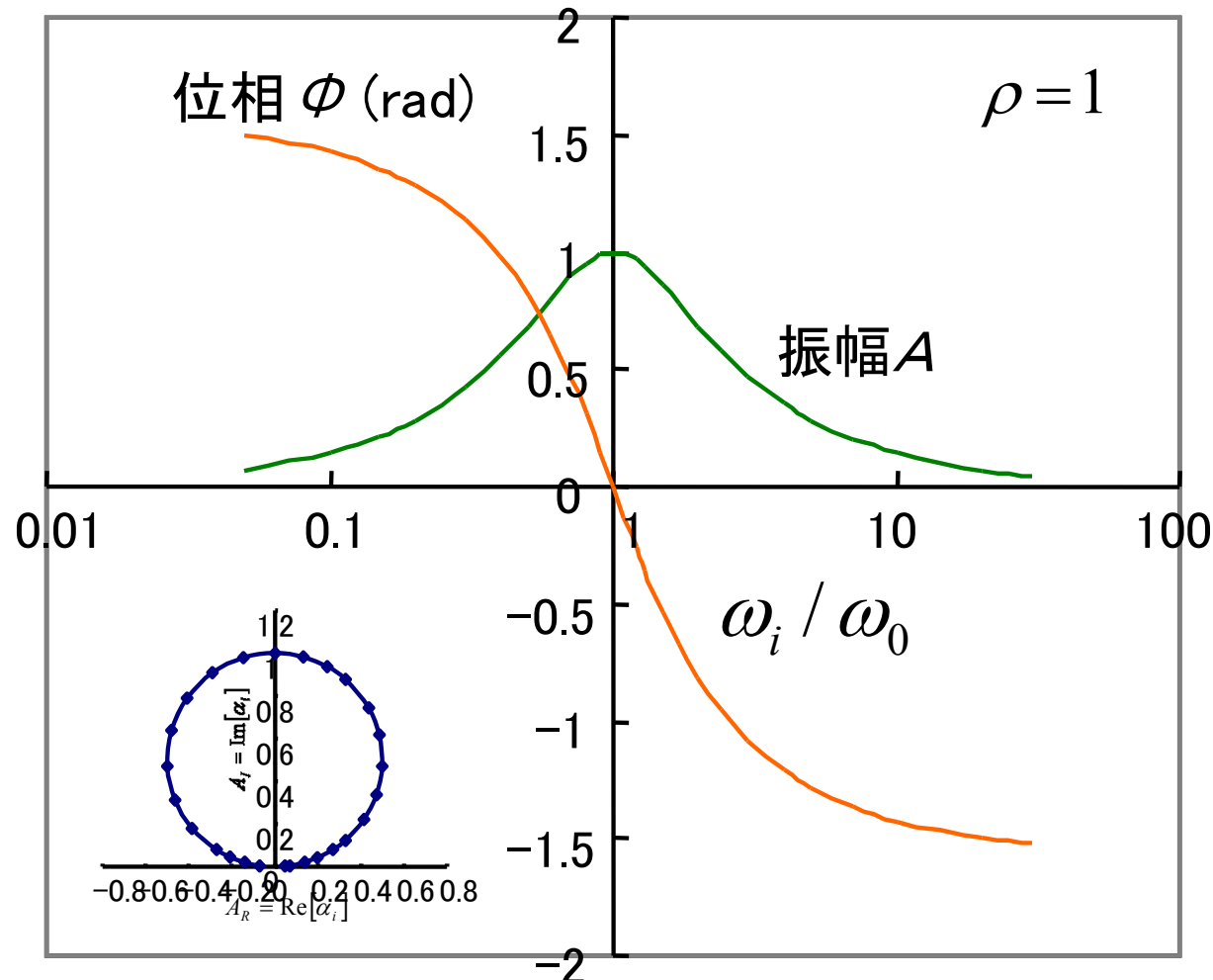


並列共振角周波数 ω_0 では、CとLの合成インピーダンスが ∞ となり、電圧伝達関数=1

それ以外の角周波数では、**入力振幅が減衰**し、リアクタンス分により**位相が回転**する

図1の回路の定常応答の角周波特性(2)

ω_i に対する $v_f(t)$ の振幅と位相をそれぞれプロットすると、

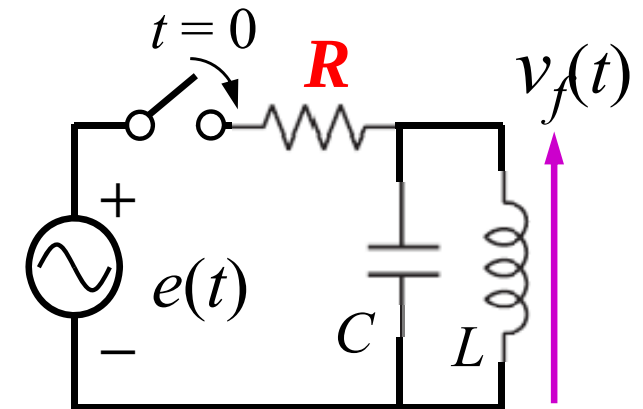
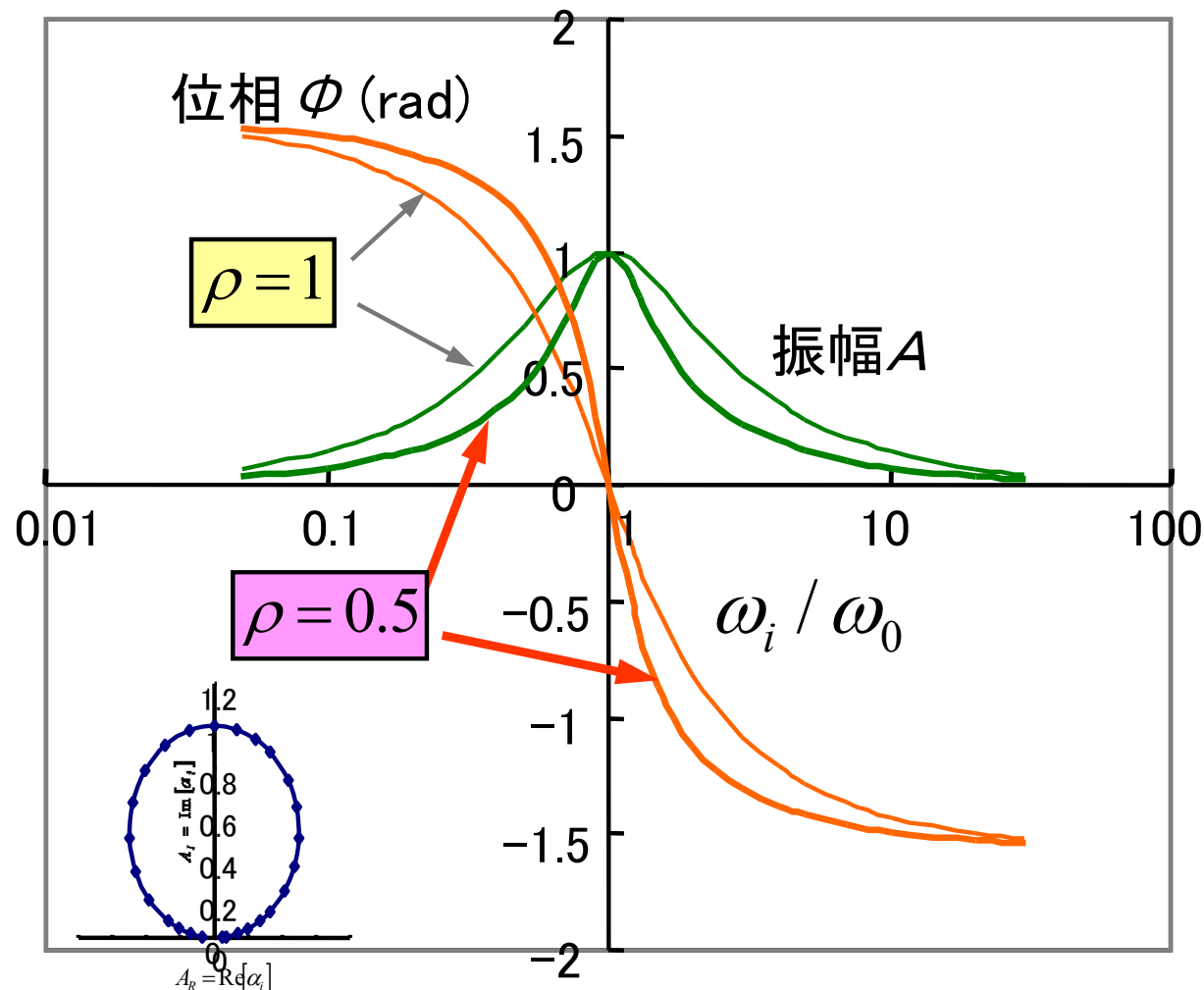


LC 共振角周波数を中心とした**振幅単峰特性**

位相は $+90^\circ$ から -90° まで回転する

図1の回路の定常応答の角周波特性(2-2)

さらに ρ の絶対値を小さくする(R を大きくする)と、

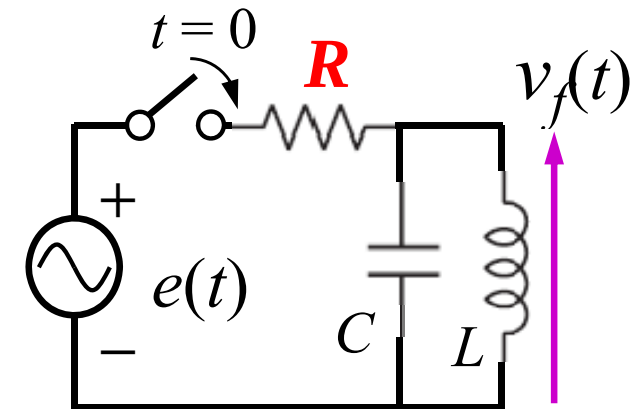
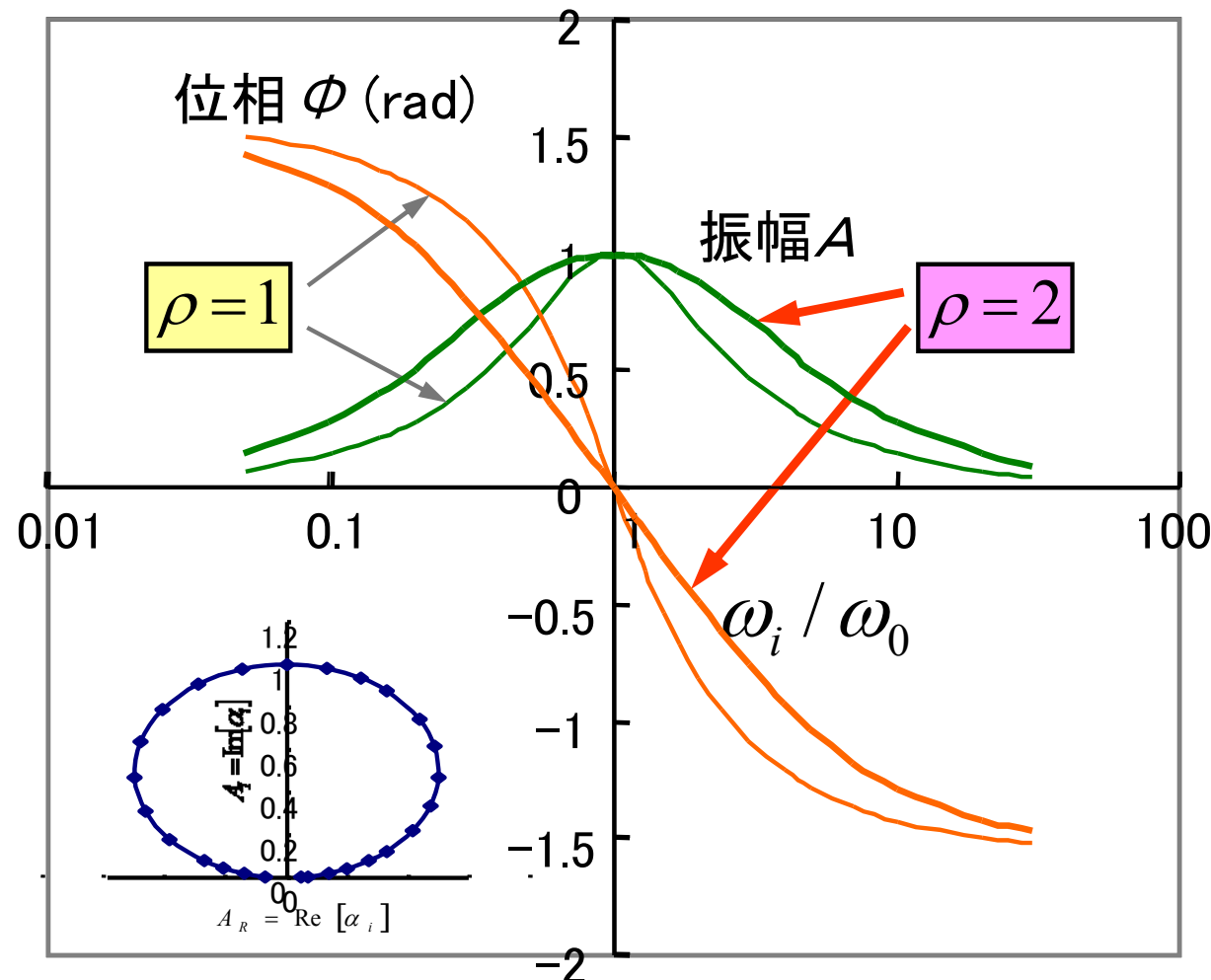


R が大きくなると、
共振角周波数付近の
振幅減衰がより急峻と
なり、位相回転も急峻
になる

➡ リアクタンス素子
の影響が支配的に

図1の回路の定常応答の角周波特性(2-3)

逆に ρ の絶対値を大きくする(R を小さくする)と、



R が小さくなると、
共振角周波数付近の
振幅減衰が緩和され、
位相回転もゆるやかになる

➡ リアクタンス素子
の影響が小さくなる

回路網関数と応答のまとめ

複数の素子からなる回路の伝達関数 $H(s)$ は、回路素子の駆動点関数の合成として計算できる（前回の演習）

伝達関数から、

(1) 回路固有応答(過渡応答) (2) 入力信号による強制応答(定常応答)の双方を求めることができる

回路固有の応答(過渡応答)は伝達関数の極(分母の根)で決定される

正弦波入力信号による強制応答(定常応答)は、伝達関数において $s = j\omega$ とおいた結果に等しい