

確率分布解析におけるハンケル変換型特性関数の有用性

～ 伝搬環境のレイトレーシング:その後処理のための ～

唐沢 好男

概要

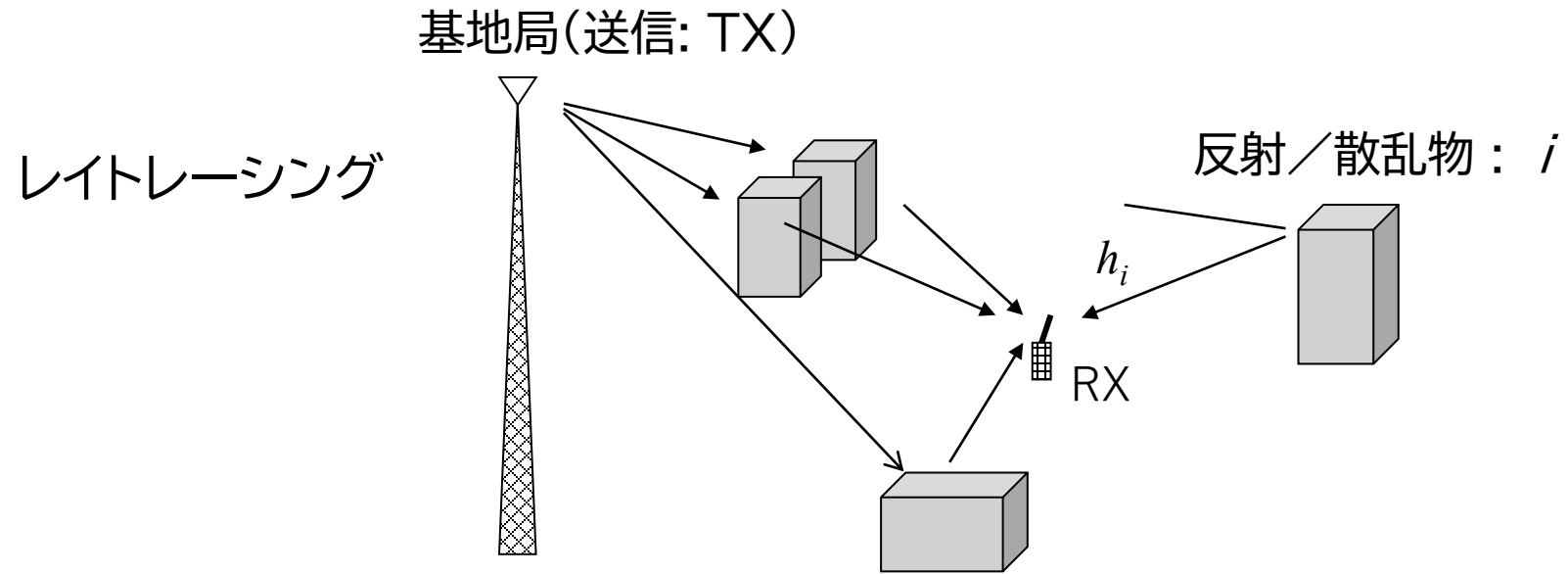
ミリ波伝搬環境評価の有力手段としてレイトレーシングがある。本発表では、レイトレーシングによって得られたパス解析データから、受信強度の確率分布を求める方法をまとめる。解析の手法は、ハンケル変換形の特性関数を用いる。解析手法そのものは古典的なものであるが、ミリ波伝搬のように直接波と特定な数のマルチパス波よりなる環境の解析に適している。

(本内容の詳細レポートは[こちら](#))

発表の内容

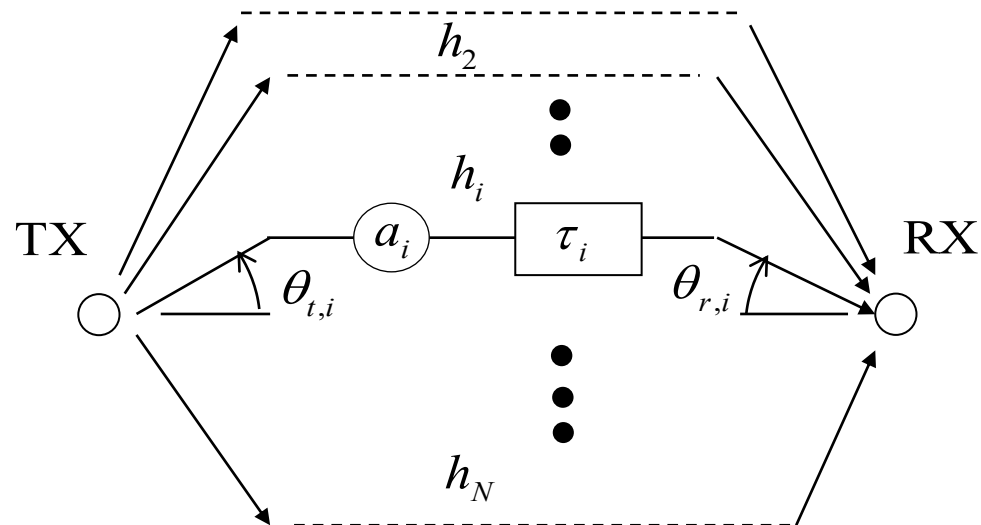
1. 電波伝搬環境のレイトレーシングとその後処理
2. 確率分布解析におけるハンケル変換型特性関数
3. 代表的な確率分布への応用
4. 適用に際しての留意点
5. まとめ

電波環境のレイトレーシング



得られる情報
(各パス i に対して)

h_i : インパルス応答
 a_i : 複素振幅
 τ_i : 遅延時間
 $\theta_{t,i}$: 放射角度
 $\theta_{r,i}$: 入射角度



電波環境のレイトレーシング:その後どうする？

直接に得られる情報:インパルス応答

$$h(\tau, \theta_t, \theta_r) = \sum_{i=1}^N h_i(\tau, \theta_t, \theta_r)$$
$$h_i(\tau, \theta_t, \theta_r) = a_i \delta(\tau - \tau_i) \delta(\theta_t - \theta_{t,i}) \delta(\theta_r - \theta_{r,i})$$

レイトレーシングの結果を処理して得られる情報

- ① 受信強度の確率分布 → 回線設計、BER評価
- ② 遅延プロファイルと遅延スプレッド → 広帯域伝送特性(符号間干渉)
- ③ パス方向の角度スペクトル → アダプティブアレー、MIMO

(空間信号処理)

受信信号の合成振幅(包絡線)

$$a = \sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \rightarrow r = \left| \sum_{i=1}^N a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \right|$$

この確率分布を
求めたい

求めたいもの: 合成信号の振幅(包絡線)の確率分布

任意振幅の N 波の合成信号の振幅

$$r = \left| r_1 e^{j\phi_1} + r_2 e^{j\phi_2} + \cdots + r_N e^{j\phi_N} \right| \quad \begin{array}{l} r_1 \sim r_N: \text{振幅一定} \\ \phi_1 \sim \phi_N: \text{独立な任意位相(一様分布)} \end{array}$$

$$= \sqrt{\left(r_1 \cos \phi_1 + r_2 \cos \phi_2 + \cdots + r_N \cos \phi_N \right)^2 + \left(r_1 \sin \phi_1 + r_2 \sin \phi_2 + \cdots + r_N \sin \phi_N \right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^N r_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^N r_i r_{i'} \cos(\phi_{i'} - \phi_i)}$$

このやり方では、 $N=1$ の場合は自明に、 $N=2$ の場合は簡易な計算で r の確率分布は求められるが、 $N \geq 3$ では、簡単には求められない

確率変数の和の分布を求めるのに便利な手法: 特性関数

変数 X の確率分布: $f(x)$

フーリエ(逆)変換の形で積分変換(特性関数)

$$\Phi_X(t) = \left\langle e^{jtx} \right\rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} e^{jtx} f(x) dx$$

特性関数を用いることの便利な点

確率分布の和の分布は、畳み込み積分になって、変数の数が多くなると計算困難になる。
特性関数の土俵では、個々の分布の特性関数の積になって、演算が容易になる

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \rightarrow f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes \cdots \otimes f_N(x)$$

その特性関数は $\Phi(t) = \Phi_1(t) \times \Phi_2(t) \times \cdots \times \Phi_N(t)$

例 正規分布の和の分布 $\rightarrow$ 正規分布

指数分布の和の分布 $\rightarrow$ ガンマ分布 (スペースダイバーシチ)

正弦波の信号を足して包絡線の分布を求めるのは、包絡線同志を足し算する演算ではないので、上記の特性関数の適用が困難である

$\rightarrow$ ハンケル変換形特性関数はそれができる

ハンケル変換形の特性関数

確率密度関数(PDF) $f(r)$

$$f(r) = r \int_0^\infty g(k) k J_0(rk) dk$$

$$g(k) \{ = \langle J_0(rk) \rangle \} = \int_0^\infty f(r) J_0(rk) dr$$

積分変換対
(ハンケル変換には、いくつかの
変形があり、これもその一つ)

↑
ハンケル変換形特性関数

累積分布関数(CDF)は

$$F(r) \left(= \int_0^r f(r) dr \right) = r \int_0^\infty J_1(kr) g(k) dk$$

CDFでも一重積分が維持
されていることが嬉しい

特関数 $g(k)$ が求められれば、PDFもCDFも一重積分で済む
(一重の数値積分は、今の時代ではネックではない)

【参考】 変換が成立していることの確認

$$g(k) = \int_0^{\infty} J_0(kr) f(r) dr$$

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk$$

$$= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) \left[\int_0^{\infty} J_0(kr') f(r') dr' \right] dk$$

$$= r \int_0^{\infty} f(r') \left[\int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr') dk \right] dr'$$

$$= r \int_0^{\infty} f(r') \frac{1}{r'} \delta(r' - r) dr' \quad (\text{大幅に省略})$$

$$= f(r)$$

正弦波合成信号の包絡線変動のハンケル変換形特性関数

振幅 r_1 の一波の場合 ($N=1$)

$$f_{r\phi}(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \delta(r - r_1)$$

$$g(k) = \int_0^\infty J_0(kr) \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi dr = \int_0^\infty J_0(kr) \delta(r - r_1) dr = J_0(kr_1)$$

振幅 r_1 と r_2 の二波の場合 ($N=2$)

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \quad (\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1)$$

ベッセル関数を展開する
ノイマンの加法定理により

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0\left(k\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi}\right) d\Delta\phi = J_0(kr_1)J_0(kr_2)$$

それぞれの特性関数が積の形になっていて、
全体の特性関数を求めるのに好都合な形

振幅 $r_1 \sim r_N$ の N 波の場合

$$g(k) = J_0(kr_1) \times J_0(kr_2) \times \cdots \times J_0(kr_N) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i)$$

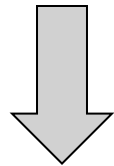
(Kluyver, 1906)

同程度の強さの波が多数集まった場合

$$g(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \approx [J_0(kr_i)]^N \quad (\text{振幅を } r_i \text{ で代表})$$

(N が十分大きい)

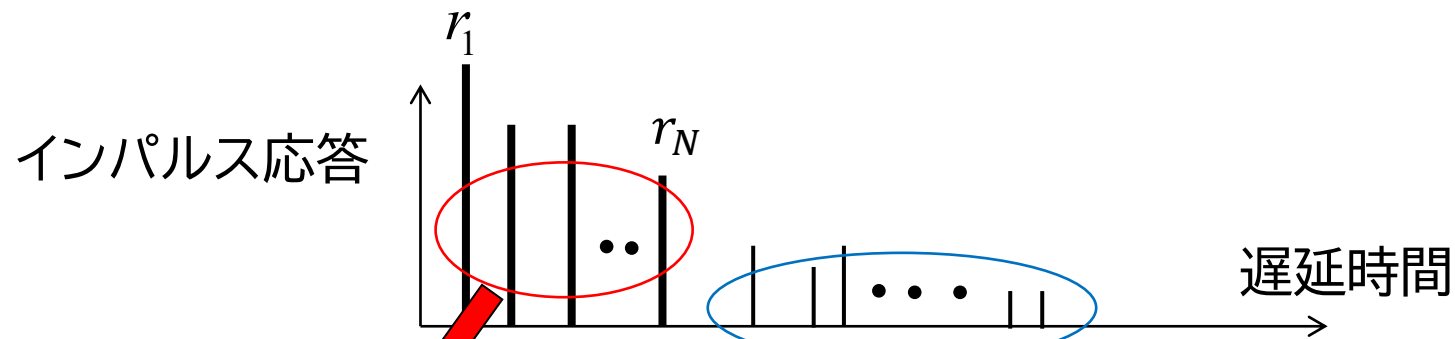
$$\approx \left[1 - \frac{(kr_i)^2}{4} + \frac{(kr_i)^4}{64} - \frac{(kr_i)^6}{2304} + \dots \right]^N \approx \exp\left(-\frac{N(kr_i)^2}{4}\right)$$



振幅がレイリー分布するときの
ハンケル変換型特性関数

$$g(k) \approx \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad \left(\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_i^2\right)$$

マルチパス環境におけるハンケル変換形特性関数 $g(k)$



合成信号

$$a = r_1 e^{j\phi_1} + r_2 e^{j\phi_2} + \dots + r_L e^{j\phi_L} + r_{L+1} e^{j\phi_{L+1}} + \dots + r_N e^{j\phi_N}$$

主要な L 波

まとめて一つの不規則波
(振幅: レイリー分布)

$$\left(\sum_{i=L+1}^N r_i^2 \equiv 2\sigma^2 \right)$$

$$g_1(k) = \prod_{i=1}^L J_0(kr_i)$$

$$g_2(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$

ハンケル変換形特性関数

$$g(k) = g_1(k) \times g_2(k) = \prod_{i=1}^L J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$

確率分布の数値積分計算

確率密度関数(PDF)

$$f(r) = r \int_0^{\infty} g(k) k J_0(rk) dk$$

累積分布関数(CDF)

$$F(r) \left(= \int_0^r f(r) dr \right) = r \int_0^{\infty} J_1(kr) g(k) dk$$

CDFでも一重積分が維持
されていることが嬉しい

特性関数 $g(k)$ が求められれば、PDFもCDFも一重積分で済む
(一重の数値積分は、今の時代ではネックではない)

【参考】 仲上n分布(仲上・ライス分布)の誕生

1定常波と1不規則波の合成信号の振幅

【ハンケル変換形特性関数利用】

$$g(k) = J_0(kr_0) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr_0) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk$$

【 r, ϕ 結合確率密度関数から】

$$f_{r\phi}(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0 r \cos \phi + r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi$$

仲上稔 (1940)

積分式の解法は
岩波数学公式 IIIに

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right)$$

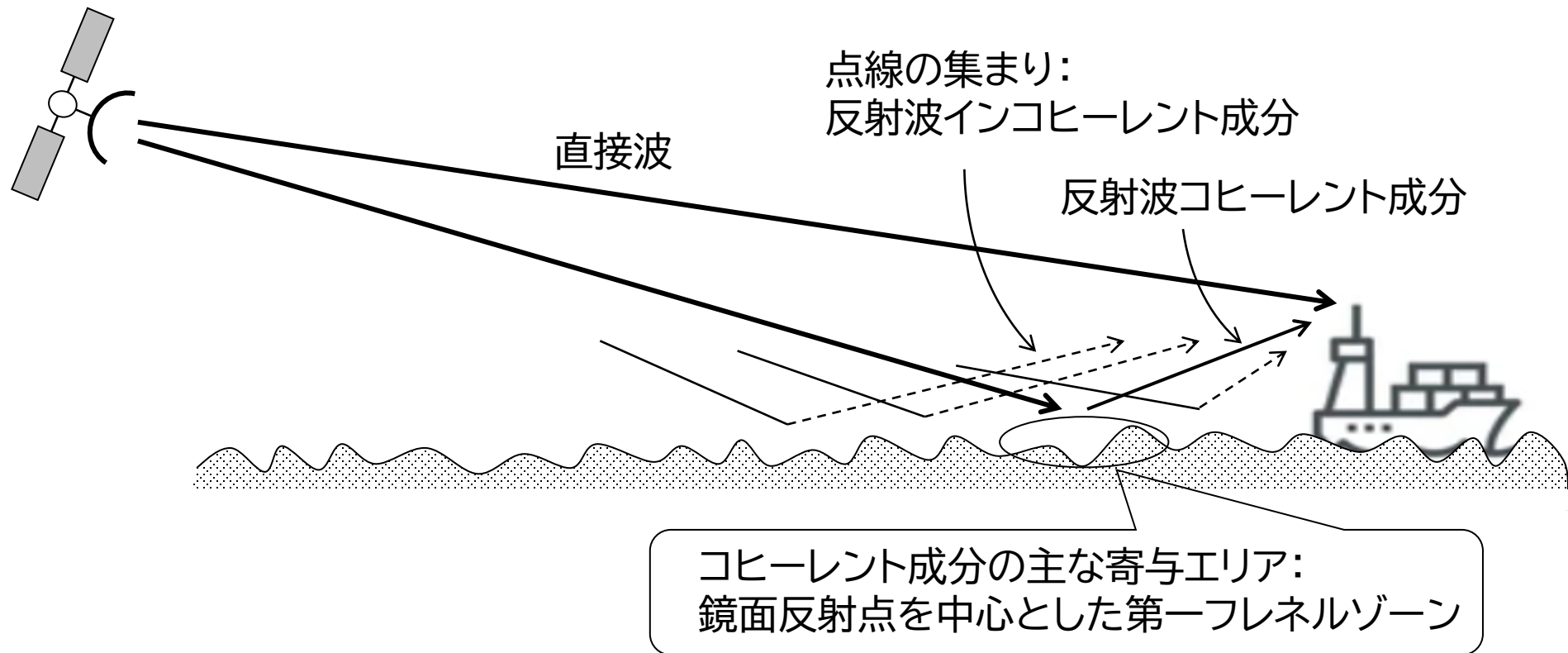
S. O. Rice
(1945)

(式の導出にはライスの方法をお奨め)

2定常成分＋不規則変動成分の合成振幅の分布

(よく使われているが、
定着した名前はない)

【典型的な例：海面反射フェージング】

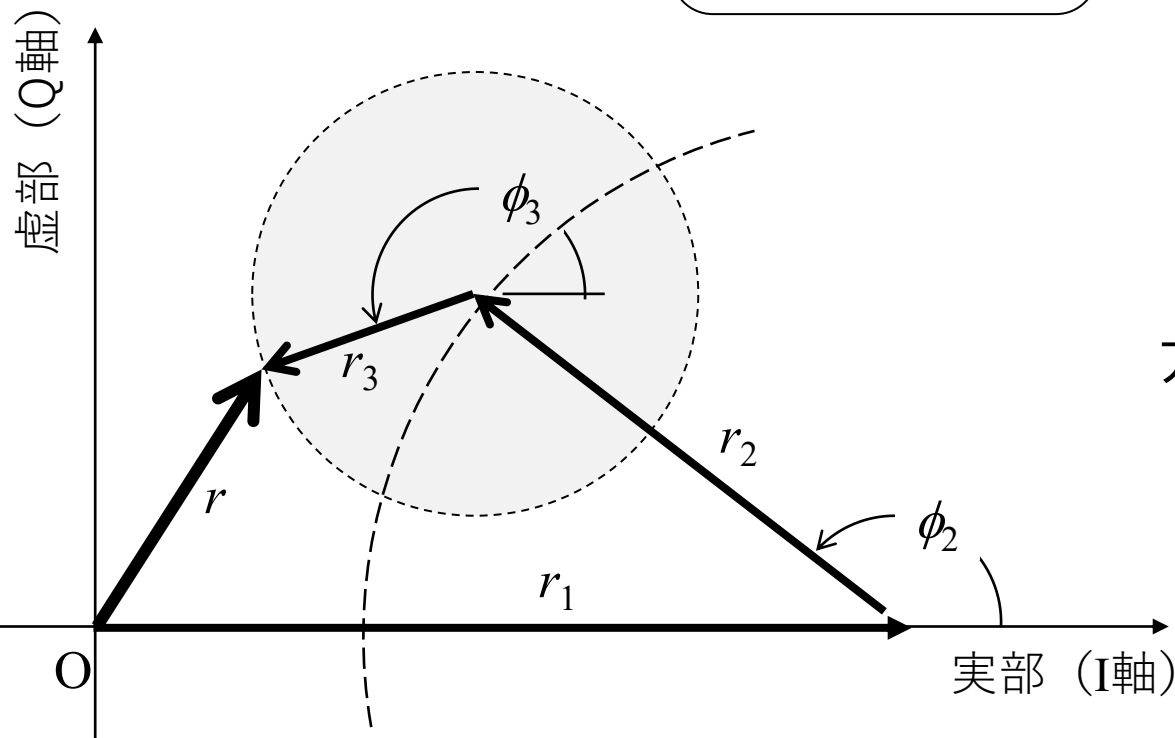


陸上における、大地反射フェージングなども同様

2定常成分＋不規則変動成分：確率分布

$$r = |r_1 + r_2 e^{j\phi_2} + r_3 e^{j\phi_3}|$$

r_1, r_2 : 一定値
 r_3 : レイリー分布
 ϕ_2, ϕ_3 : 一様分布



方法1: ϕ_2 固定の仲上・ライス分布の位相平均
(従来手法)

$$f_{r\phi}(r; r_1, r_2, \sigma^2, \phi_2) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{12}^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_{12}r}{\sigma^2}\right)$$

$$r_{12}(r_1, r_2, \phi_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \phi_2}$$

$$\sigma^2 = \langle r_3^2 \rangle / 2$$

$$f(r; r_1, r_2, \sigma^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r; r_1, r_2, \sigma^2, \phi) d\phi$$

方法2: ハンケル変換型特性関数利用

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr_1) J_0(kr_2) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dk$$

どちらも数値積分になるが、累積分布も
1重の数値積分で済む方法2が便利

【参考】数値積分設定の目安

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk$$

積分の上限値: k_{max}

計算の刻み幅: Δk

最も簡易な積分計算式(単純分割合成)

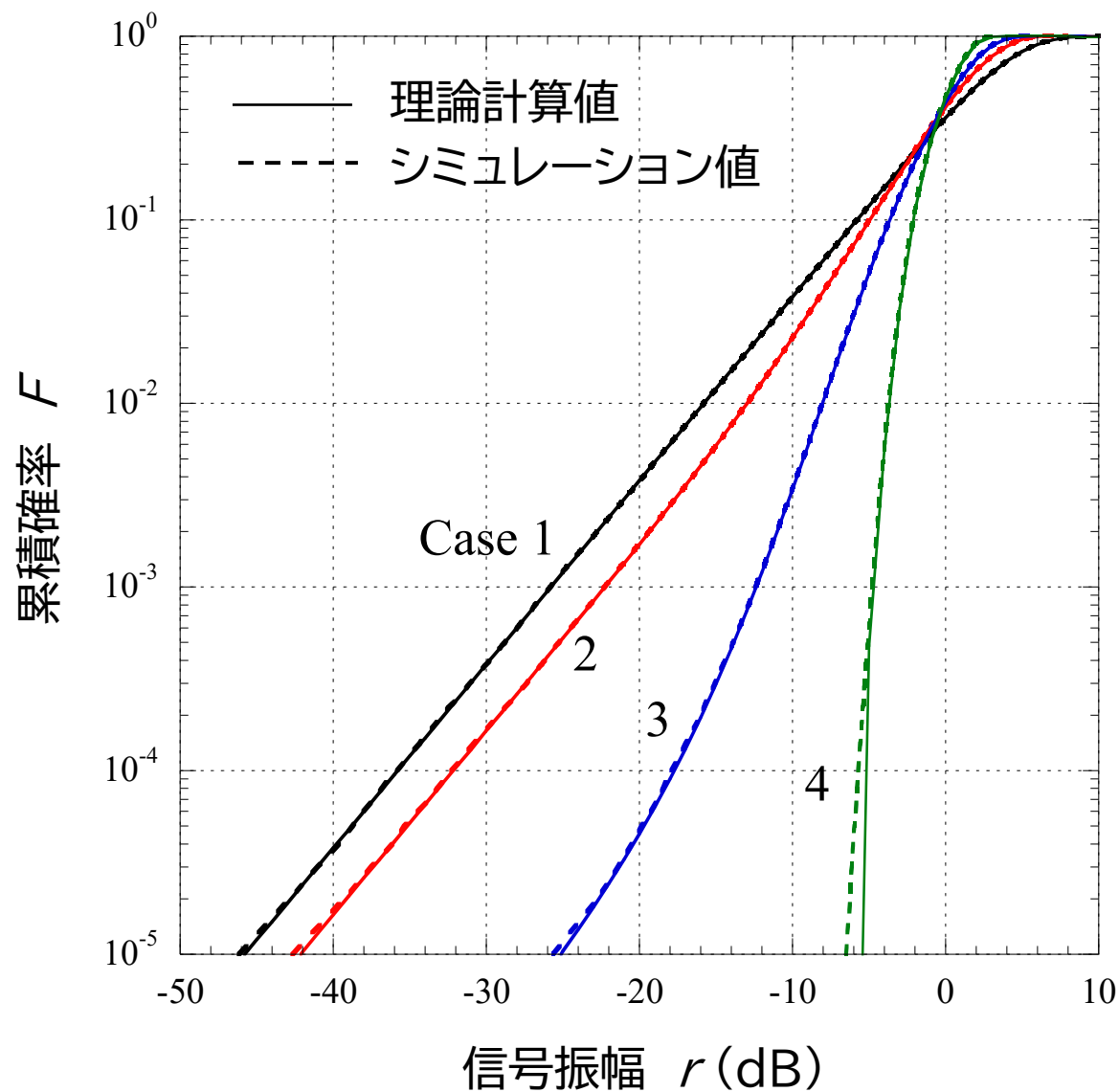
$$f(r) = r \sum_{m=0}^{k_{max}/\Delta k} k_m J_0(k_m r) \prod_{i=1}^L J_0(k_m r_i) \exp\left(-\frac{\Delta P k_m^2}{4}\right) \Delta k \quad (k_m = m \Delta k)$$
$$F(r) = r \sum_{m=0}^{k_{max}/\Delta k} J_1(k_m r) \prod_{i=1}^L J_0(k_m r_i) \exp\left(-\frac{\Delta P k_m^2}{4}\right) \Delta k$$

- i) r の小さい変化の部分を精度よく求めたいためには、 k の値(k_{max})が大きいところまで計算する必要がある
- ii) r の大きい値の部分を精度よく求めたい場合は、 k の刻み幅(Δk)を小さくしなければならない
- iii) K_{max} および Δk の目安値は r の実効値の逆数に比例する

適用の目安範囲 $r / \sqrt{P_r} \geq -50[\text{dB}]$, $F \geq 10^{-5}$

$$k_{max} \geq 10,000 / \sqrt{P_r} \quad \left(P_r = \sum_{i=1}^L r_i^2 + \Delta P \quad \left(\Delta P = \sum_{i=L+1}^N r_i^2 \right) \right)$$
$$\Delta k \leq 0.1 / \sqrt{P_r}$$

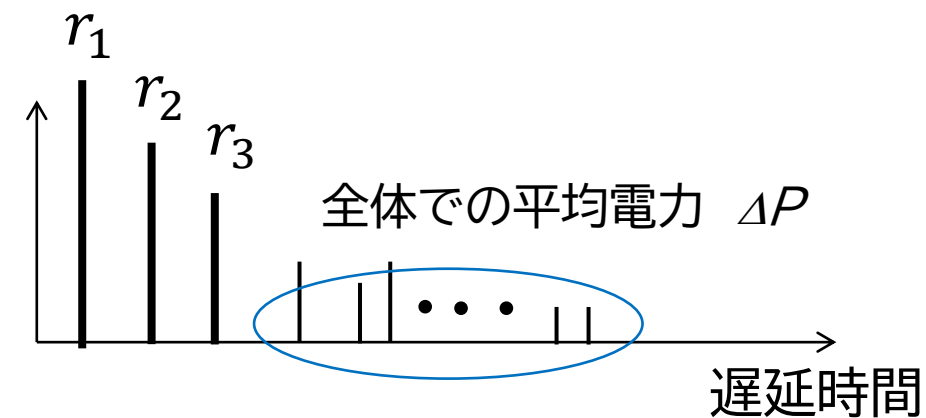
計算例： 3波＋不規則波の分布



設定環境

Case	r_1	r_2	r_3	ΔP
1	1	0.5	0.3	0.5
2	1	0.4	0.3	0.1
3	1	0.3	0.2	0.05
4	1	0.2	0.1	0.01

$$(\Delta P \equiv 2\sigma^2)$$



まとめ

伝搬環境解析の方法としてレイトレーシングがある

それによって得られたパス解析データから、合成信号の振幅(包絡線レベル)の確率分布を求めたいときには、ハンケル変換形の特性格関数を利用する方法が有効

ハンケル変換形特性格関数を用いると振幅の確率密度関数も累積分布関数も一回の数値積分で求めることができる。

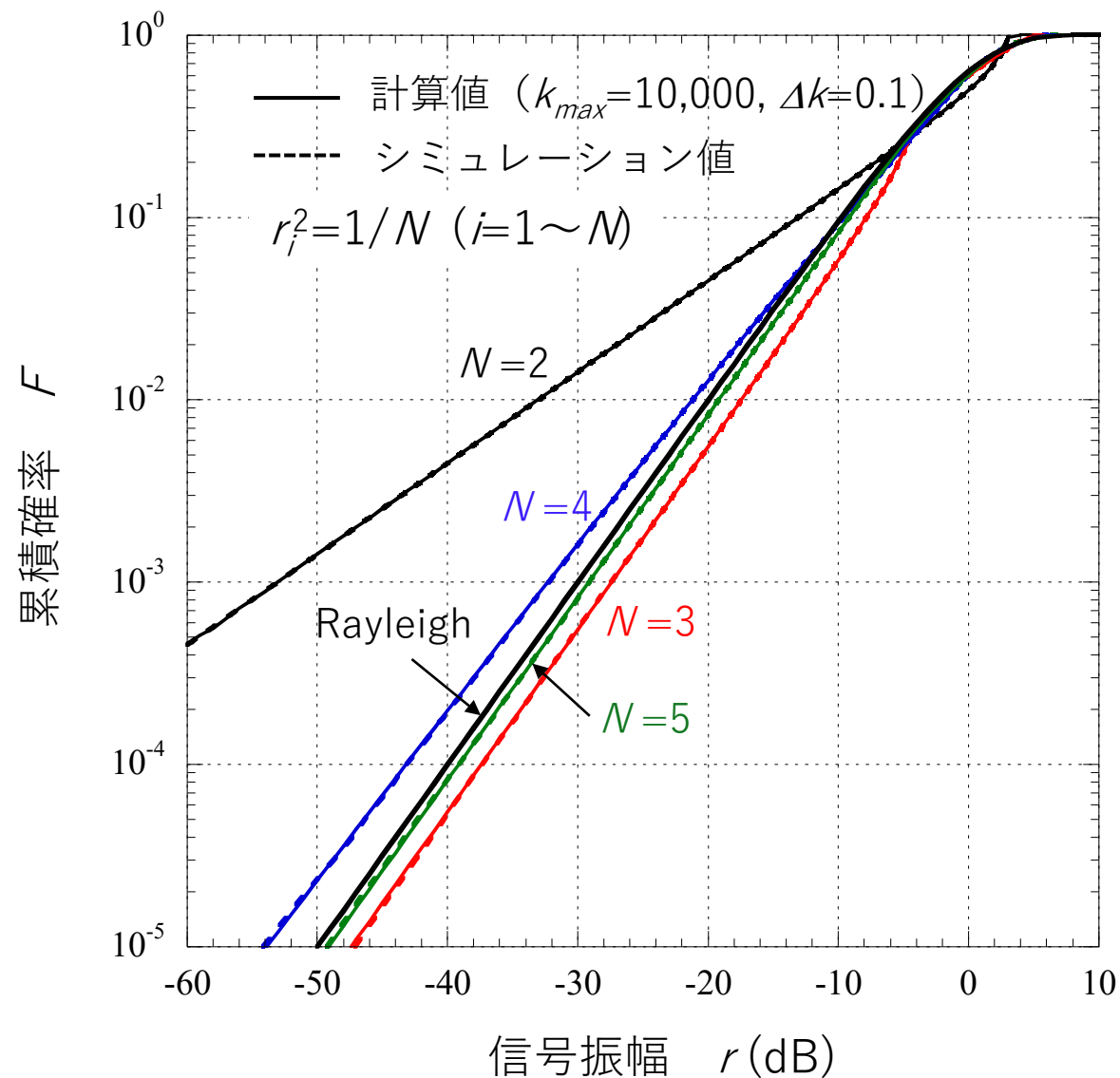
この方法は、仲上がn分布(仲上・ライス分布)を生み出すときに利用した手法であり、確率分布の世界では古典である。仲上自身は、閉形式で表される式の導出に利用したが、今の時代のパソコンの演算性能では、一重の数値積分計算程度では大きな隘路にはならないので、確率分布解析の手段として身に着けておくと、役に立つことがあると思う

本内容をまとめた詳しい資料は参考文献も含めて、[唐沢研ホームページ](#)に置いている
ネット公開書籍「[伝搬モデルの基礎～確率分布と統計的推定～](#)」の [Appendix 1](#) に

参考

等振幅 N 波の
合成信号の振幅
のCDF

$N = 2 \sim 5$



シミュレーション値は乱数により 10^7 回試行した結果から、統計が安定している累積確率 10^{-5} 以上を示しているので、正しい理論値を代理していると思ってほしい。「レイリー分布は同振幅 5 波程度の合成で良い」の根拠が分かる。