

多変量確率分布と電波伝搬モデル

～仲上3分布からマルチクラスタモデルまで～

唐沢 好男

電波伝搬モデルの中に現れる様々な確率分布の中で、多変量正規分布に源を置く分布を系統的に整理する。その分布がどのような意味を持つかを中心に述べる。仲上稔氏が編み出した源流に近いところに位置する三つの分布($n \cdot m \cdot q$ 分布)から、近年の伝搬モデル(マルチクラスタモデル等)まで、これらのモデルを成す確率分布は一つの型を共有して一本の糸でつながっている。

(限られた時間の中で全体を述べることはできない)

本内容の詳細レポートは [唐沢研究室ホームページ](#) より公開

技術レポート: [TR-YK-090_multivariate_normal_distribution.pdf](#)

発表の内容

1. 多変量正規分布
2. 2変量正規分布のノルムの分布
3. 多変量正規分布のノルムの分布
4. 多変量レイリー分布
5. 最大比合成(MRC)ダイバーシチに現れる確率分布
6. マルチクラスタモデル

多変量正規分布

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$\mathbf{X} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N)^T, \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N)^T, \quad \langle (X_i - \mu_i)^2 \rangle = \sigma_i^2$$

(共分散行列; 相関行列)

$$\Sigma = \langle (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \rangle = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} & \dots & \sigma_1 \sigma_N \rho_{1N} \\ \sigma_2 \sigma_1 \rho_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2 \sigma_N \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N \sigma_1 \rho_{N1} & \sigma_N \sigma_2 \rho_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad (\rho_{ij} = \rho_{ji})$$

多変量正規分布のノルム(R)とその二乗値(Z)の確率分布の形(核)

$$R = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2}, \quad Z = R^2 \quad (\text{最大比合成に現れる形})$$

$$\rightarrow f(r) \propto r^a \exp(-br^c) I_d(er^f) \quad (\text{変数間が無相関な場合は } R \text{ も } Z \text{ も 大部分ががこの形でまとめられる})$$

2変量正規分布(2次元空間分布)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right]$$

2次元空間でのノルムの分布(x-y 平面座標, IQ 複素平面座標)

$$R = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

- ① 等分散(等方)・無相関・平均値0(中心) → レイリー分布
- ② 等分散(等方)・無相関・平均値有り(非心) → 仲上・ライス分布(n分布)
- ③ 不等分散(非等方)・有相関・平均値0(中心) → 仲上・ホイト分布(q分布)

多変量正規分布でのノルムおよびノルム二乗値の分布

$$R = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_N^2}, \quad Z = R^2$$

ノルム R の分布 (変数がi. i. d. (同一分布・無相関)の場合)

- ① 等分散(等方)・平均値0(中心) → カイ分布(自由度 N : 整数)
仲上 m 分布(パラメータ m : 0.5以上の実数)
- ② 等分散(等方)・平均値有り(非心) → 非心カイ分布(自由度 N : 整数)
(仲上・ライス分布は自由度2の非心カイ分布)

ノルム二乗値 Z の分布

- ③ 等分散(等方)・平均値0(中心) → カイ二乗分布(自由度 N : 整数)
ガンマ分布(パラメータ $\nu > 0$)
- ④ 等分散(等方)・平均値有り(非心) → 非心カイ二乗分布(自由度 N : 整数)

では、有相関の場合は？

通信応用では、次の多変量レイリー分布で考えるのが良い

多変量正規分布から多変量レイリー分布へ

$$f(r_1, r_2, \dots, r_M; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2; \Sigma) = ? \quad \{M = N/2 \text{ (} N: \text{偶数)}\}$$

$$R_m = \|X_m\| = (X_m, Y_m), \quad X_m, Y_m \sim N(0, \sigma_m^2)$$

$$f_{R_m}(r_m) = \frac{r_m}{\sigma_m^2} \exp\left(-\frac{r_m^2}{2\sigma_m^2}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

$$\Sigma = 2 \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1M}\sigma_1\sigma_M \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2M}\sigma_2\sigma_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M1}\sigma_M\sigma_1 & \rho_{M2}\sigma_M\sigma_2 & \cdots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}$$

通信応用では x - y 平面
(IQ複素平面)で等分散
なもの(= ブランチ信号
振幅がレイリー分布)を
扱うことが大部分

ダイバーシチ解析や通
信ネットワーク解析では
この形が求められてい
る
(Matsumoto (2024)等)

多変量レイリー分布

位相変量を消去して振幅分布に周辺化

$$f_R(r_1, r_2, \dots, r_M) = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f_{R\Phi}(r_1, r_2, \dots, r_M, \overbrace{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M}^{\text{位相変量}}) d\phi_1 \cdots d\phi_M$$
$$X_m = R_m \cos \Phi_m, \quad Y_m = R_m \sin \Phi_m$$

2変量レイリー分布($M=2$)

$$f(r_1, r_2) = \frac{4r_1 r_2}{(1-|\rho|^2)\Gamma_1 \Gamma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{1-|\rho|^2} \left(\frac{r_1^2}{\Gamma_1} + \frac{r_2^2}{\Gamma_2} \right) \right\} I_0 \left\{ \frac{2|\rho| r_1 r_2}{(1-|\rho|^2)\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}} \right\}$$
$$f_{X_m}(x_m) = f_{Y_m}(y_m) = N(0, \sigma_m^2) \quad (m=1, 2) \quad \Gamma_m = \langle R_m^2 \rangle = 2\sigma_m^2$$

(4変量正規分布から導かれる。原典: S. O. Rice (1945), その後、各種通信の専門書に)

$M \geq 3$ では

位相成分の積分が残り、閉形式で表すことができない。

色々な工夫をして、少しでも解きやすい形にする研究が行われている(Beaulieu (2011)等)

3変量レイリー分布 ($M=3$)

$$f(r_1, r_2, r_3) = \frac{4r_1 r_2 r_3}{\pi \Delta \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} \exp \left\{ -\frac{1}{\Delta} \left(\frac{1-c^2}{\Gamma_1} r_1^2 + \frac{1-b^2}{\Gamma_2} r_2^2 + \frac{1-a^2}{\Gamma_3} r_3^2 \right) \right\} \\ \times \int_0^{2\pi} \exp(\gamma \cos \phi) I_0 \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \phi} \right) d\phi$$

$$\Gamma_m = \langle R_m^2 \rangle = 2\sigma_m^2 \quad (m=1, 2, 3)$$

$$\Delta \equiv 1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc$$

$$a = |\rho_{12}|, \quad b = |\rho_{13}|, \quad c = |\rho_{23}|$$

$$\alpha = \frac{2(a-bc)}{\Delta \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}} r_1 r_2, \quad \beta = \frac{2(b-ac)}{\Delta \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_3}} r_1 r_3, \quad \gamma = \frac{2(c-ab)}{\Delta \sqrt{\Gamma_2 \Gamma_3}} r_2 r_3$$

(6変量正規分布から導く。導出の詳細は技術レポート [TR-YK-90](#) [4])

3変量レイリー分布式の確認(選択合成ダイバーシチへの適用)

環境設定

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$$

$$(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1/2)$$

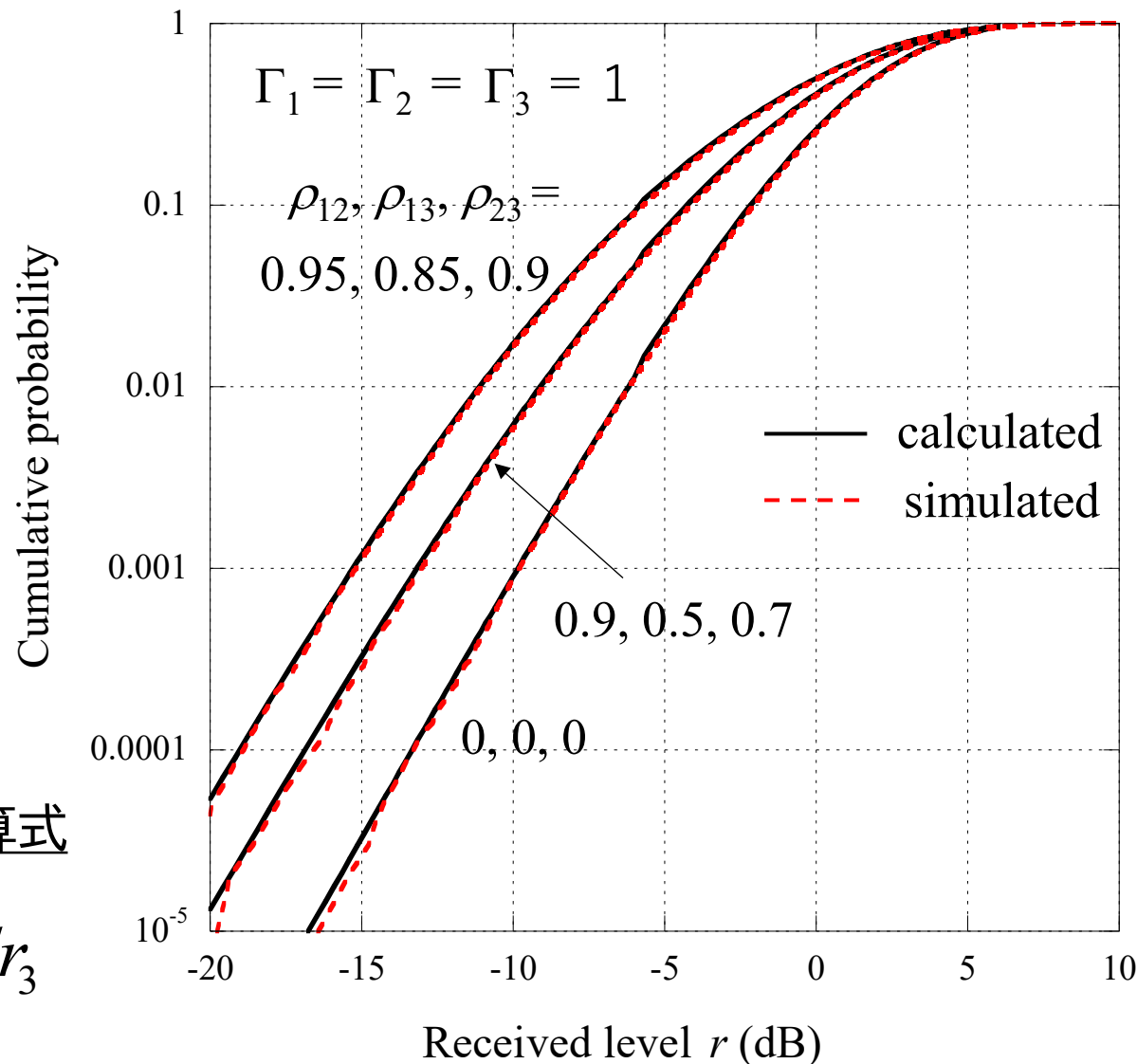
有相関環境の生成

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}^{1/2} \mathbf{b}$$

無相関分布

選択合成ダイバーシチ(最良ブランチ選択)の計算式

$$F_{SD}(r) = \int_0^r \int_0^r \int_0^r f_R(r_1, r_2, r_3) dr_1 dr_2 dr_3$$



最大比合成(MRC)ダイバーシチに現れる確率分布(有相関フェージングの場合)

レイリーフェージング環境

ブランチ出力

有相関変動 $\mathbf{a}(t) = (a_1(t) \ a_2(t) \ \cdots \ a_M(t))^T$

相関行列の固有ベクトルを要素とするユニタリ行列によって直交変換した無相関変動に変換

$$\mathbf{b}(t) = (b_1(t) \ b_2(t) \ \cdots \ b_M(t))^T$$

MRC出力 ($\propto$ アレー出力の内積):

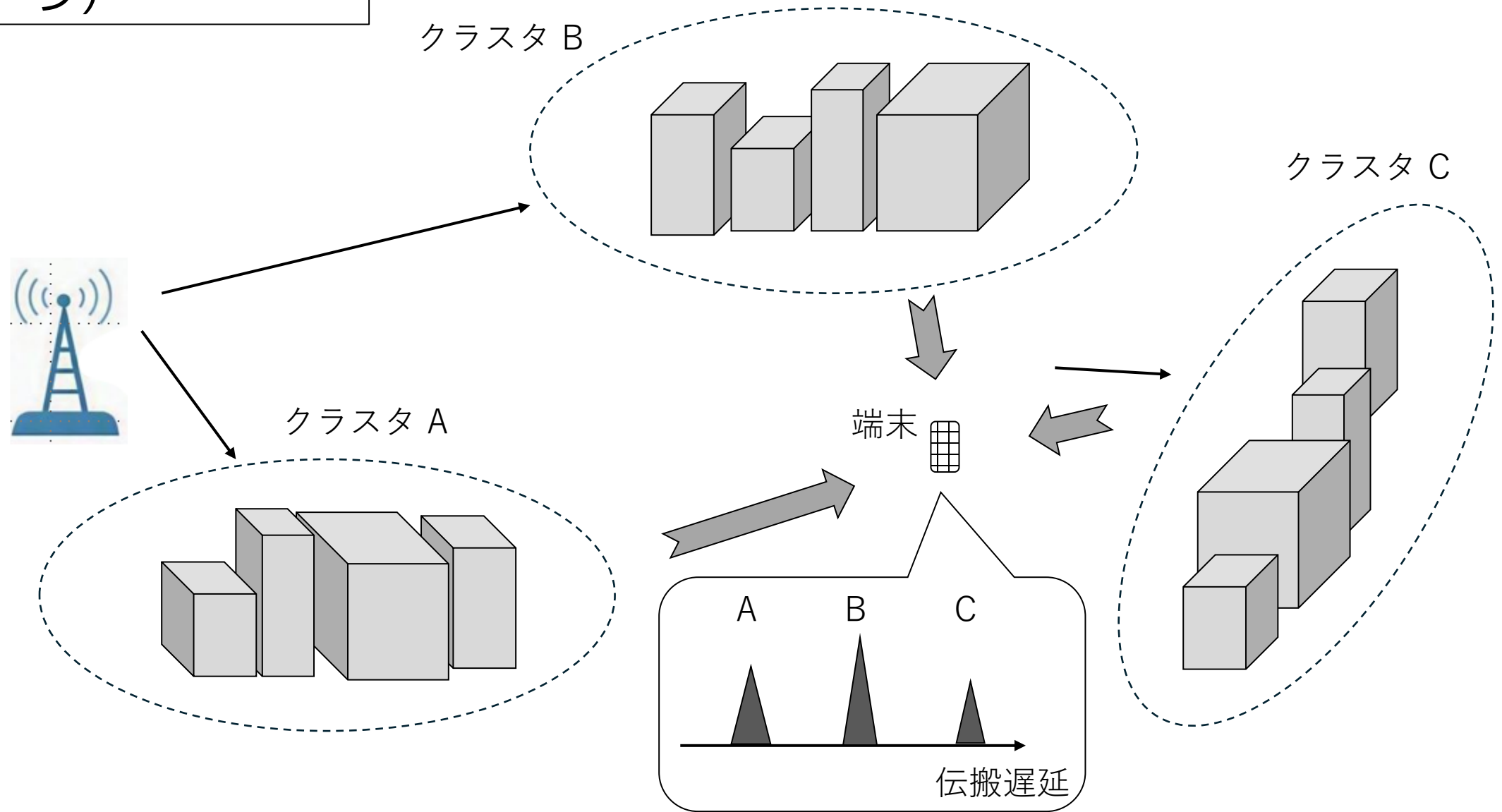
$$z(t) \propto \mathbf{a}^H(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{b}^H(t)\mathbf{b}(t) \quad (\text{内積の性質: 直交変換によって不変})$$

相関行列の固有値を用いて、分散の異なる独立な指数分布の和の分布として求められる

仲上・ライスフェージング環境

- ・各ブランチ信号が i.i.d. なら、非心カイ二乗分布
- ・定常波成分の位相が不ぞろいで、かつ、不規則波成分に相関がある場合には、閉形式の分布式を得ることはできない → 技術レポート [TR-YK-094](#) を見てほしい

マルチクラスタ伝搬環境 (イメージ)



κ - μ 分布 (Yacoub, 2007)

$$f_R(r) = \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\kappa^{(\mu-1)/2} \exp(\mu\kappa)} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\mu \exp\left\{-\mu(1+\kappa)\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right\} I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\frac{r}{\hat{r}}\right) \quad \left(\hat{r} \equiv \sqrt{\langle R^2 \rangle}\right)$$

3つのパラメータ

κ : 変動成分と定常成分の比率、 μ : クラスタ数、 $\hat{r}$: 平均電力

κ と μ の値を適当に定めることにより

仲上・ライス分布、仲上m分布、レイリー分布、半ガウス分布を実現(多機能性)

分布の基本構造(核)

$$f_R(r) \propto r^a \exp(-br^2) I_{a-1}(cr) \quad (\leftarrow \text{非心カイ分布})$$

マルチクラスタモデルは他にもいろいろ提案されている。
新しく分布式が提案されたら、じっと睨んで本質を見抜く目を養ってほしい
それぞれの構造を理解した上で適切なものを選んで利用してほしい。

まとめ： 多変量正規分布が作り出す世界

多次元・等分散・非心(中心を含む)・無相関の変量のノルムやその二乗値に共通する確率分布の形(分布の核)

$$f(x) \propto x^a \exp(-bx^c) I_d(ex^f) \quad (6 \text{パラメータ})$$

- ・ 有相関では、閉形式で表せない場合もある。
- ・ 最大比合成(MRC)では、ノルムの二乗値の分布で事足りるが、他の応用においては、同時確率分布(JPDF)そのものも求められる。
- ・ ニーズに即した使いやすいモデルの構築は電波伝搬研究の核心