第４章　振幅変動を表す確率分布

伝搬環境を表す言葉にはレイリーフェージング環境、仲上-ライスフェージング環境など確率分布に基づくものが多い。ここでは、フェージング環境を表す分布のうち、信号強度（振幅）変動を表す代表的な確率分布を取り上げる。いずれも加法性確率過程における正規分布を基にする分布であるが、特に、我が国で生まれた仲上-ライス分布（ｎ分布）と仲上-ホイト分布（ｑ分布）に多くのページを割いている。なお、本来、振幅変動を扱う確率分布としてこの章で扱うべき仲上ｍ分布については、別の章（第６章）を設けそこで詳しい解説を行う。【note: 本書４章～６章で取り上げる確率分布については、多変量正規分布のノルム視点で技術レポート TR-YK-090（本書の補足資料１）にまとめているので、併せてみてほしい】

4.1　レイリー分布

正規分布が確率分布の基本（＝出発点になる分布）であるように、本節で述べるレイリー分布はマルチパス環境における信号強度（振幅・包絡線）変動を表す分布の出発点である。

マルチパスフェージングとは、送信アンテナから送り出された電波が、伝搬途上で反射や散乱を受け、多数の電波（素波）に分かれて受信点に到来し、それをアンテナで受信したとき、受信信号の振幅や位相が不規則に時間変動する現象を言う。ここでは、狭帯域信号を代表する無変調信号で考え、信号はベースバンド系（等価低域通過系）の複素数表現とする。各素波 i の振幅と位相を r_i, θ_i，素波数を N とすると、受信信号 a は時間 t の関数として次式で表される。

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{i=1}^{N} r_i(t) e^{j\theta_i(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{N} r_i(t)\cos\theta_i(t) + j\sum_{i=1}^{N} r_i(t)\sin\theta_i(t) = x(t) + jy(t) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

ここで、x, y は信号成分を実数分と虚数分に分けて表したものである。この時、素波のそれぞれの大きさが似たようなものであって、かつ、素波の数 N が十分大きいとき、x と y（確率変数と言う意味では X と Y）は、中心極限定理により、平均値が 0 で分散値を同じにする独立な正規分布になる。この物理量 x と y の確率密度関数 f_X, f_Y が共に $N(0,\sigma^2)$ に従うとき、結合確率密度関数 f_{XY} は f_X と f_Y の積になり、次式で表される。

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (4.2)$$

ここで求めたいのは振幅 r（確率変数 R、ベクトルで表した時のノルム）

$$r = |x + jy| \left(= \sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad (4.3)$$

の分布であるので、x, y を振幅 r と位相θを用いて次式で置き換える。

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta \tag{4.4}$$

確率変数 R とΘ の結合確率密度関数 $f_{R\Theta}$は変数変換の式(2.14)より次式となる。

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = f_{XY}(x,y)\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.5}$$

これより、振幅 r、位相θの確率密度関数f_R, f_Θは、それぞれ

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\Theta}(r,\theta)d\theta = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.6}$$

$$f_\Theta(\theta) = \int_0^{\infty} f_{R\Theta}(r,\theta)dr = \frac{1}{2\pi} \tag{4.7}$$

となる。(4.6)式で表される確率分布が**レイリー分布**（Rayleigh distribution）、(4.7)式の分布が**一様分布**（uniform distribution）である。レイリー分布は、19 世紀末（1880 年）、イギリスの物理学者レイリー卿（Load Rayleigh）によって名づけられている。

レイリー分布の累積分布関数 Fは、(4.6)式の積分によって得られ、

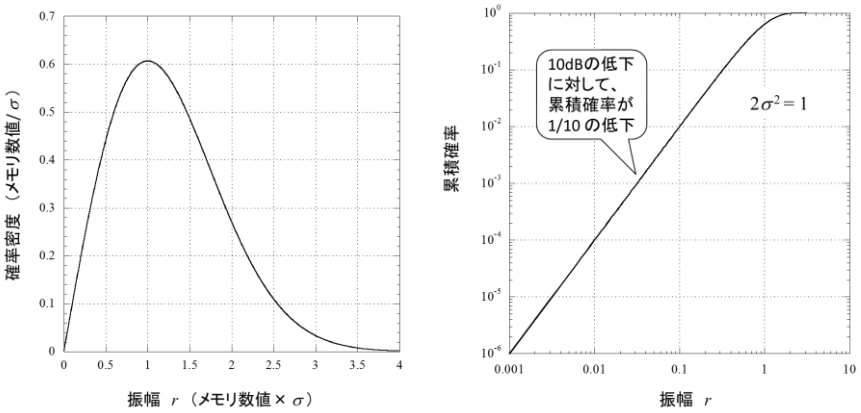
$$F(r) = 1-\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.8a}$$

$$\approx \frac{r^2}{2\sigma^2} \qquad (r << \sqrt{2}\sigma) \tag{4.8b}$$

となる。(4.8b)式より、累積確率値が 0.1 以下の部分では、振幅 r（あるいは電力 r^2）が 10dB 低下すると、累積確率は 1/10 になる。

レイリー分布の最頻値はσ, 中央値は$\sqrt{\ln 4}\,\sigma \approx 1.18\sigma$、平均値は$\sqrt{\pi/2}\sigma \approx 1.25\sigma$、rms 値は$\sqrt{2}\,\sigma \approx 1.41\sigma$、標準偏差は$\sqrt{2-\pi/2}\,\sigma \approx 0.665\sigma$ である。図 4.1(a)はレイリー分布の確率密度関数、同図(b)は $2\sigma^2$=1 のときの累積分布関数（両軸共対数目盛）を示している。

レイリー分布は、位相のランダムな波が多数集まった時の信号の強度（包絡線）の分布に現われる。直接波が遮へいされて、たくさんの散乱波だけが受信される地上系移動通信の見通し外（NLOS）マルチパスフェージング環境が代表的な例である（同程度の振幅の波であれば、５波集まればかなり良いリー分布となる（後に示す図 4.7 参照））。このように、振幅の変動がレイリー分布する伝搬環境は**レイリーフェージング**（Rayleigh fading）環境と呼ばれている。



（a） σで規格化した確率密度関数　　（b）$2\sigma^2$=1 のときの累積分布関数

図 4.1　レイリー分布

なお、$Z=R^2$ としたときの Z の分布は 5.1 節で述べる指数分布になる。

図 4.1(a)を見て、何か不思議に感じることは無いだろうか。レイリー分布を複素面上に見た場合、x 軸方向も y 軸方向も原点付近の密度が一番高くなっているのに、その中心を示す距離 r=0 で確率密度が 0 になっている。的に向かって飛んでくる矢が一番当たりそうな場所（＝危険地帯）が r =0 付近なのに、そこが確率 0 なんてと。これが不思議だと感じた皆さんは、是非、図 4.2 を睨んで考えていただきたい。人口密度が中心から $\exp(-r^2/(2\sigma^2))$に比例して少なくなるエリアがある。十分に狭い幅Δr ごとに円形の国境があり、一つ一つの円環がそれぞれの国土。その国毎の人口をプロットするとそれがレイリー分布に。r の値が大きくなるほど人口密度は薄くなるが、国土面積は増えてくる。両者の積（＝式(4.6)）が図 4.1(a)の形を作っている。

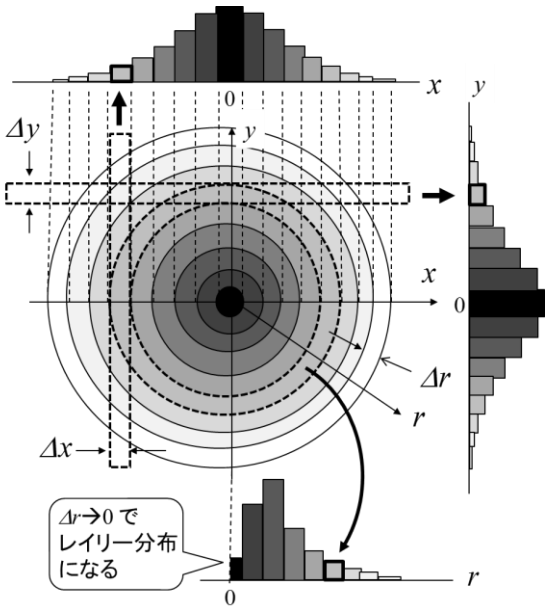


図 4.2　レイリー分布の仕組み

本書の各章では、確率分布の基本的な性質の説明にとどめているが、具体的にレイリー分布するマルチパスフェージング環境の生成法に関しては Appendix 2（フェージング環境の生成）にまとめているので、計算機シミュレーションによるディジタル信号伝送特性の評価等に参考にしてほしい。

4.2　仲上-ライス分布

4.2.1 名前の由来

1930 年代後半から 1940 年代、不規則信号の振幅の確率分布の理論的研究は、我が国では国際電気通信株式会社（当時の国策会社）の仲上稔により、米国ではベル研究所のライス（S. O. Rice）により独立に行われていた。仲上は短波の受信信号の強度分布の理論的考察から、一つの確率分布を与える式を 1940 年の電気通信学会誌に発表した[1]。同じ式は、ライスにより、雑音下での信号の強度分布を与える分布として、ベル研の技術雑誌 BSTJ に、1944/1945 年に発表された[2]（一つの論文が 2 回に分けて発表され、当該分布が提示されているのは 1945 年の号）。仲上の発表の方が 5 年早いのであるが、仲上が研究開発に取り組んだ時代は、満州事変から太平洋戦争へと進む昭和の動乱期であり、このような状況において、日本語で書かれた論文が世界に知られることが無かったのである。一方、BSTJ はこの分野の世界最先端の技術論文誌であり、論文誌の国際性や認知度の違いから、欧米では、ライス論文が仲上論文より先に知られ、この分布は**ライス分布**（Rice distribution, Ricean distribution）の名で世に広まっていった。その後、我が国の先人たちは、特に、国際無線通信の標準化会合（当時の CCIR）の場などにおいて、仲上の先着権をことあるごとに主張し、現在では**仲上・ライス分布**の名前が定着しつつある。現行の ITU-R 勧告（Rec. ITU-R. P. 1057）では、分布の名前が Nakagami-Rice distribution で定義されている。しかし、国際学会の発表や論文誌、あるいは英語版 Wikipedia などでは、今なお、ライス分布で呼ばれることが多く楽観できる状況でもない。筆者も、せめて日本人くらいはと思って、積極的に仲上・ライス分布と呼んでいるが、あるとき論文で使ったら、使ってもよいが注釈を入れろとコメントされたこともある。

さはさりながら、このようにして、同時代の洋の東西で、異なる目的、異なる手法（この後で説明）で、後の時代の移動伝搬モデルの基本式：仲上・ライス分布が生まれたことは大変興味深い。

なお、仲上は、この後述べる仲上-ホイト分布、仲上 m 分布も編み出しており、彼自身が三つの分布（仲上-ライス分布、仲上-ホイト分布、仲上m分布）を論文の中で比較するときは、それぞれを n 分布、q 分布、m 分布と呼んでいた[3]。レポート[4]では、仲上三分布へ歴史探訪し、当時の時代背景をまとめているので、興味ある方は見てほしい。

4.2.2　分布の導出：ライスの方法

仲上-ライス分布の導出は、仲上とライスでは異なる方法をとっている。ライスの方法の方が平易なため、授業などで学生に教えるのには向いている。ゆえに、最初に、ライスの方法で説明

する。

ライスは無変調信号に雑音が加わった場合の信号振幅の確率分布を求めている。信号と雑音の関係なので、図 4.3 のようにモデル化ができる。信号成分（振幅 r_0）を実軸方向（便宜上、実軸を x 軸、虚軸を y 軸と置く）にとるとき、これに、分散σ^2 の x,y 独立な 2 次元ガウス雑音が加わったモデルである。両成分の確率密度関数は、x 成分に対して $N(r_0,\sigma^2)$、y 成分に対して $N(0,\sigma^2)$

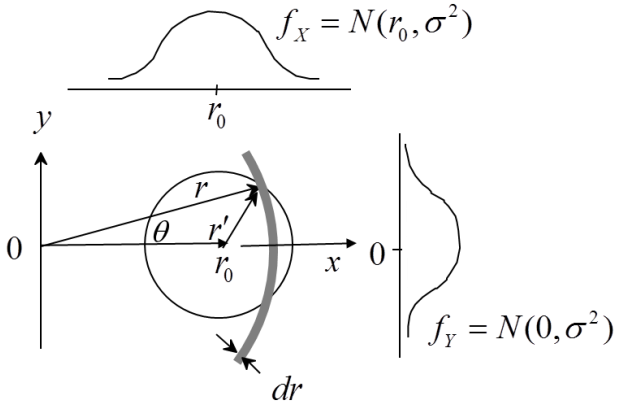


図 4.3　信号（r_0）と雑音（r’）の合成振幅（r）のモデル

で表される。レイリー分布では、両成分共に $N(0,\sigma^2)$であったのに対し、x 成分のみ平均値 r_0 分だけずれているが、導出手順そのものはレイリー分布の場合と同じである。

確率変数 X, Y の結合確率密度関数 $f_{XY}(x,y)$は

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-r_0)^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) \tag{4.9}$$

であり、これを極座標変換して、$f_{R\Theta}(r,\theta)$を求めると、

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0 r\cos\theta + r^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2} \right) \exp\left(\frac{r_0 r\cos\theta}{\sigma^2} \right) \tag{4.10}$$

となる。これより、振幅 r の確率密度関数は

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\Theta}(r,\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2} \right) \quad \left(\because \quad I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{t\cos\phi} d\phi \right) \tag{4.11}$$

となる。積分は変形ベッセル関数 I_0 の積分表示を用いて直ちに得られる。(4.11)式で与えられる分布が**仲上-ライス分布**である。

4.2.3　分布の導出：仲上の方法

仲上は、同程度の強さの多数の波があるところに、それより強い一つの波が加わった場合の合成信号振幅（包絡線）の確率分布を求めた。その解析手段には、2.4.4 項で説明したハンケル変換形特性関数を用いる方法を採っている。多数の同程度の大きさの波（その振幅を $\tilde{r}$ で代表）が合成された信号（平均電力 $2\sigma^2$）の振幅はレイリー分布することを前項で述べたが、それを、ハンケル変換形特性関数で表すと次式である（導出の詳細は Appendix 1 参照)。

$$g(k)=\prod_{i=1}^{N}J_0(kr_i)\approx\left[J_0(k\tilde{r})\right]^N$$

$$\approx\left[1-\frac{(k\tilde{r})^2}{4}+\frac{(k\tilde{r})^4}{64}-\frac{(k\tilde{r})^6}{2304}+\cdots\right]^N \qquad \text{（以下、}N\text{ が十分大きいとして）}$$

$$\approx\exp\left(-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right)\qquad\left(\because\ \tilde{r}^2\approx\frac{2\sigma^2}{N}\right) \tag{4.12}$$

因みに、レイリー分布から直接ハンケル変換形特性関数に変換すると、

$$g(k)=\int_0^\infty J_0(kr)\left\{\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right\}dr$$

$$=\exp\left(-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right)\quad\left(\because\ \int_0^\infty x\exp\left(-px^2\right)J_0(ax)\,dx=\frac{1}{2p}\exp\left(-\frac{a^2}{4p}\right)\right)$$

となって、(4,12)式になるので、辻褄が合っている。

仲上は、この状態に対して、一つだけ強い波（振幅 r_0）が加わった場合を考えた。この発想がが n 分布（仲上が呼んだ仲上-ライス分布のこと）誕生の原点である。この環境のハンケル変換形特性関数と確率密度関数は以下のように表される。

$$g(k)=\ J_0(kr_0)\left[J_0(k\tilde{r})\right]^N$$

$$\approx J_0(kr_0)\exp\left(-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right) \tag{4.13}$$

$$f(r)=r\int_0^\infty kJ_0(kr)J_0(kr_0)\exp\left(-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right)\,dk$$

$$= \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r_0^2+r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right) \tag{4.14}$$

仲上は、(4.14)式中の積分を解くのに Watson の Bessel Function の本を使ったことが記されているが、今では、岩波の数学公式 III [5]が利用できる。得られた形は(4.11)式と同じである。なお、仲上は定式化に際して、r_0 の強さが「著しい不動」である場合としているが、得られた式自体を見るとわかるように、どんな強さの r_0 に対しても適用でき、「著しい不動」の条件は消えている。



ティータイム　　仲上の奮闘

このように大筋の流れでまとめてしまうと、仲上がいともたやすく(4.14)式にたどり着いたように感じると思うが、けっしてそうではない。原著論文[1]と、その前篇である[6]、[7]からは、フェージングの特性解明を目指して、その方法が雲をつかむような段階であったところから、困難な道を自ら切り開いて行った苦闘の跡を読み取ることができる。[6]では先人の確率関数理論に習い、以降で行うフェージング解析の道具立てを行っている。[7]では、主に、位相差が一定で振幅のみが不規則に変動する多数の波の合成の理論解析を行っている。そして、[1]では、振幅が一定で位相のみが不規則に変動する多数の波の合成問題に土俵を移し、ついに、n 分布という新しい確率分布を手に入れることができたのである。 n 分布誕生の歴史に興味を持たれた読者は、是非、これら原著論文にも目を通し、その雰囲気を味わってほしい（大学の図書館などには古い学会誌も保管されている）。電磁気学を完成させたマクスウェルの論文（1864）もそうであったと聞くが、我々は後にヘビサイドとヘルツによって整理された 4 つの連立方程式（いわゆる、マクスウェルの方程式）で学ぶので、電磁気学の理解も容易になっている。開拓者の論文は野戦病院さながらで、必ずしも目的に向かって一直線でないところに、その意を受け止めることの難しさを感じるのである。

4.2.4　仲上-ライス分布の基本特性

分布の形は r_0 と残りの波全体の電力の比 $r_0^2/(2\sigma^2)$で決まる。この比は**ライスファクタ**と呼ばれ、文字は K で表すことが多い。（本当は、これも「仲上-ライスファクタ」と呼びたいが、既に定着していて、今さらの状態にある。「K ファクタ」とも呼ばれるので、それで我慢したい）。K ファクタを用いて表すと次式である。

$$f(r;r_0,K) = \frac{2Kr}{r_0^2}\exp\left(-K\left\{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\}\right) I_0\left(2K\frac{r}{r_0}\right) \quad \left(K \equiv \frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.15}$$

図 4.4 は r_0 も含めた全電力を 1 に正規化したとき（$r_0^2+2\sigma^2=1$）の確率密度関数を K をパラメータにして表している。当然ながら、r_0 の比率が大きい（＝K の値が大きい）ほど、フェージン

グの変動幅が小さくなる。移動通信のマルチパス環境として見れば、振幅 r_0 の直接波に不規則な散乱波が加わった環境、すなわち、見通し内（LOS）伝搬環境を表すフェージングのモデルになる。また、r_0=0 とすれば、レイリー分布になり、見通し外（NLOS）を含んで幅広い伝搬環境を表す確率分布である。

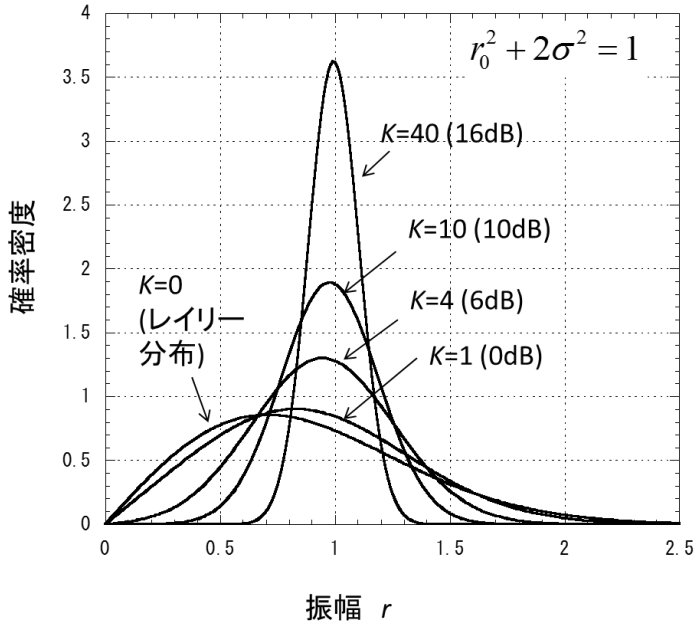


図 4.4　仲上-ライス分布の計算例

なお、(4. 15)式を実際に計算するとき、K の値が大きくなると（例えば 100 以上）になると、I_0 が極めて大きな値に成り、かつ、指数関数が 0 に近づき、計算ソフトによっては正しい計算ができなくなる場合がある（=指数関数部分が 0 に置き換えられてしまう）。指数関数と I_0 の積そのものは妥当な値に収まっているので、そのような場合、

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad (x \to \infty)$$

の近似により、

$$\exp\{u(x)\} I_0(\alpha x) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha x}} \exp\{u(x) + \alpha x\}$$

と書けるので、この部分を近似式に置き換えた次式を用いるとよい。

$$f(r; r_0, K) \approx \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{Kr}{\pi r_0}}\, \exp\left\{-K\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)^2\right\} \qquad (K \geq 10) \tag{4.16}$$

実測などによって十分な数の r のデータがあって、その分布を仲上-ライス分布に近似するときのライスファクタ K を求めたい場合には、r^2 および r^4 の平均値（標本平均）を用いて次式で

算定できる[8]。（後述する仲上ｍ分布の式(6.4)で m を$\langle r^2\rangle$と$\langle r^4\rangle$で表し、式(6.5c)の m と K の関係より導かれる。）

$$K=\frac{\langle r^2\rangle\sqrt{2\langle r^2\rangle^2-\langle r^4\rangle}+2\langle r^2\rangle^2-\langle r^4\rangle}{\langle r^4\rangle-\langle r^2\rangle^2} \tag{4.17}$$

また、仲上-ライスフェージング環境においては、位相の分布も必要になろう。これは(4.10)式の結合確率密度関数$f_{R\Theta}(r,\theta)$より、次式で求められる。

$$f_\Theta(\theta)=\int_0^\infty f_{R\Theta}(r,\theta)dr=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\times\left[1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{r_0\cos\theta}{\sigma}\exp\left(\frac{r_0^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{r_0\cos\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right\}\right] \tag{4.18}$$

上式の積分は部分積分の手順に従って根気良く行えば得られる。

4.3　複数定常波+不規則波の分布

4.3.1　２定常波＋不規則波の分布

図 4.5 に示すような海面反射によるフェージングを考えてみよう。海面が穏やかなときは反射波は鏡面反射点方向から来て、振幅も位相も安定である。このような、直接波成分に対して一定の位相関係にある成分は**コヒーレント成分**（位相同期成分）と呼ばれる。波が高くなって海面が荒れてくると、コヒーレント成分は波高の増加と共に指数関数的に弱くなる。一方、海面の広い範囲から多数の散乱波が到来する状態となり、受信信号の振幅や位相は不規則に変動する。この変動成分は**インコヒーレント成分**（位相非同期成分）と呼ばれる。

図 4.5 に示すケースでは、受信信号の振幅 r は、直接波信号成分（振幅：r_D, 位相：0)、コヒーレント成分（r_C, θ_C)、インコヒーレント成分（r_I, θ_I）の三成分の和となり、次式で表される。

$$r(t)=\left|r_D+r_Ce^{i\theta_C(t)}+r_Ie^{i\theta_I(t)}\right| \tag{4.19}$$

三成分の関係を図 4.6 に示している。コヒーレント成分の位相θ_Cが一定であれば、直接波成分とコヒーレント成分が一体となって定常波成分を構成し、この場合は、振幅 r は仲上-ライス分布になる。これに対して、コヒーレント成分の位相も変化して、0～2πで一様分布する場合は、**２定常波＋不規則波**の分布で、本項ではこれを対象とする。コヒーレント成分の位相が変化してしまうと定常波と言えないように思うが、振幅が一定であり、あらゆる位相角に亘って等確率に存在する状況と理解してほしい。

この確率密度関数は次式で表される。

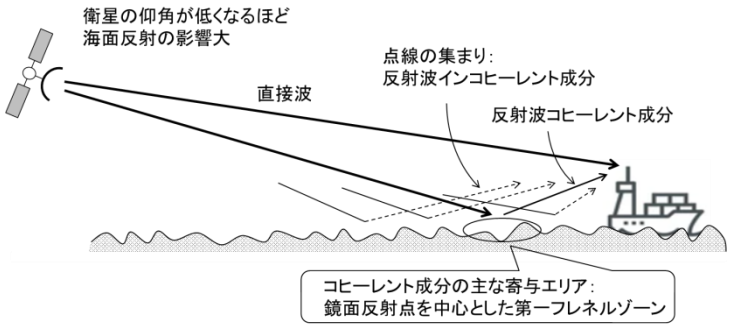


図 4.5　海面反射フェージング

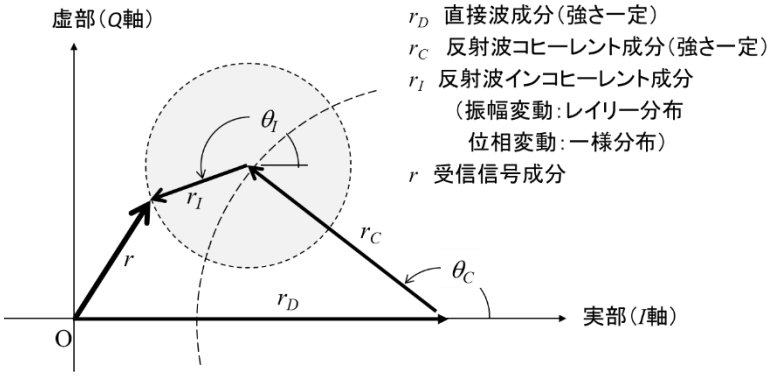


図 4.6　2 定常波＋不規則波のモデル図

$$f(r)=\frac{r}{\pi\sigma^2}\int_0^{\pi}\exp\left(-\frac{r_0^2(\theta_C)+r^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{r_0\theta_C)r}{\sigma^2}\right)d\theta_C \tag{4.20}$$

$$r_0^2(\phi)=r_D^2+2r_Dr_C\cos\phi+r_C^2$$

式の形からわかるように、これは、仲上-ライス分布の定常成分振幅 r_0 を、直接波成分とコヒーレント成分を合わせたものの振幅に置き換え、位相差 θ_C で積分して仲上-ライス分布の平均分布を出したものになる。積分が解けておらず、特に、累積分布を求めたい場合には 2 重積分になるので、解析的に扱いにくい分布であることが分かる。

次項で、より一般的な**複数定常波＋不規則波の分布**を扱うが、そこでは、ハンケル変換形特性関数を用いている。ハンケル変換形特性関数を用いる方法では累積分布も 1 重積分で済むので、実際の数値計算をしたい場合には、事項で述べる方法を推奨する。

4.3.2　複数定常波＋不規則波の分布

前項の 2 定常波の部分を一般化して、任意の数の波にする。伝搬環境のレイトレーシングでは、多くの素波が検出される。その合成信号の振幅の分布を求めたいという場合がある。各波の位相は位置に動きが無ければ一定値で変化しないが、その周囲全体での統計的な分布を得たいと言うようなときには一様分布を仮定するのが自然である。N 個の素波があって、それぞれの振幅と位相を r_i, θ_i とする。そのうち主要なものは L 波で、残りはまとめて一つの不規則波（振幅がレイリー分布する波）にまとめられるとする。この時、受信波は以下のように二つのグループに分けられる。

$$a = \underbrace{r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} + \cdots + r_L e^{j\theta_L}}_{\text{主要な } L \text{ 波}} + \underbrace{r_{L+1} e^{j\theta_{L+1}} + \cdots + r_N e^{j\theta_N}}_{\text{まとめて一つの不規則波}} \tag{4.21}$$

不規則波の平均電力を $2\sigma^2$ とすると、振幅 r (=|a|)の確率密度関数 $f(r)$と累積分布関数 $F(r)$は、ハンケル変換形特性関数 $g(k)$を介して次式で定められる。

$$f(r) = r\int_0^\infty kJ_0(kr)g(k)\,dk \tag{4.22a}$$

$$F(r) = r\int_0^\infty J_1(kr)g(k)\,dk \tag{4.22b}$$

$$g(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)\prod_{i=1}^{L} J_0(kr_i) \tag{4.22c}$$

L=1 の場合は仲上-ライス分布なので閉形式で解けて(4.14)式になる。前項の 2 定常波＋不規則波の分布は L=2 である。

$L\geq 2$ については確率密度関数を閉形式で表すことはできず、数値積分によらなければならない。近年、パソコンの性能は上がっており、一重積分程度の演算が隘路になることは無い。特に、確率密度関数を積分して得られる累積分布関数 F についても一重積分で済むところがメリットである。最も容易な数値積分法は次式で示す矩形分割である。

$$f(r) = r\sum_{m=0}^{k_{\max}/\Delta k} k_m J_0(k_m r)\prod_{i=1}^{L} J_0(k_m r_i)\exp\left(-\frac{\sigma^2 k_m^2}{2}\right)\Delta k \quad \left(k_m = m\Delta k\right) \tag{4.23}$$

その際、十分な精度を得るための分割幅Δk と k の上限値 k_{max} が重要になる。これに関しては、本書 Appendix 1 に以下のような目安値を示している。

数値計算範囲：　$r/\sqrt{P_r} \geq -50[\mathrm{dB}],\ F \geq 10^{-5}$ ；　$P_r = \sum_{i=1}^{L} r_i^2 + 2\sigma^2 \quad \left(2\sigma^2 = \sum_{i=L+1}^{N} r_i^2\right)$

設定目安値：　$k_{\max} \geq 10,000/\sqrt{P_r}$ 、　$\Delta k \leq 0.1/\sqrt{P_r}$

この設定（目安値不等式を等式に置き換えての）による累積分布の数値計算例を二つ示す。図 4.7 は等振幅 2～5 波（$r_i = 1/\sqrt{L}$）で、不規則波を 0 とした場合の数値積分値とシミュレーション値を示している。シミュレーション値は乱数により 10^7 回試行した結果から、統計が安定している累積確率 10^{-5} 以上を示しているので、正しい理論値を代理していると思ってほしい。両者は完全に一致していることが確認できる。レイリー分布の理論値も併せて示しているが、レイリーフェージング環境をシミュレーションで作る場合に、5 波程度を合成すればよいと言われていることの確認にもなっている。（注： N=3 までは、閉形式で表される理論式がある（Appendix 1 参照）、ここでは、全て数値積分で計算している）。図 4.8 は、振幅の異なる 3 定常波と 1 不規則波の合成信号振幅の累積分布で、図に示す 4 つのケースについて示している。（Case 4 では若干のずれが見えるが、これは積分側の誤差で、Δk や k_{max} の調整で一致度を上げることができる）

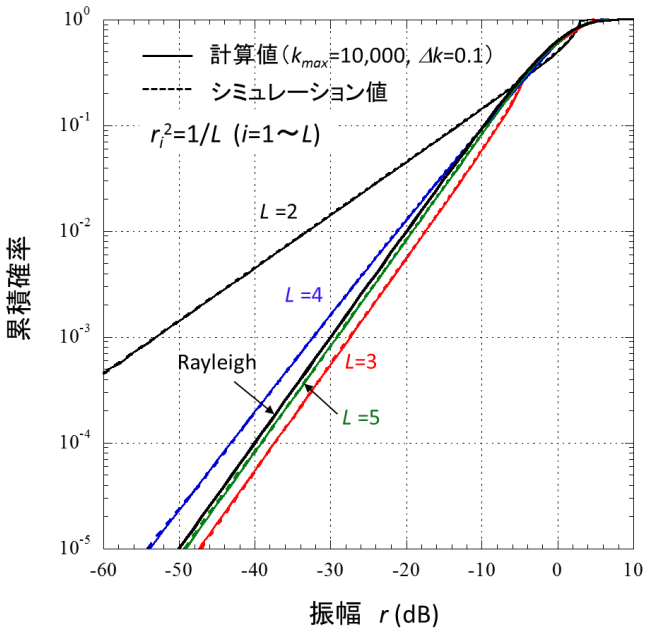


図 4.7　等振幅 L 波（L=2～5）合成信号の振幅の累積分布

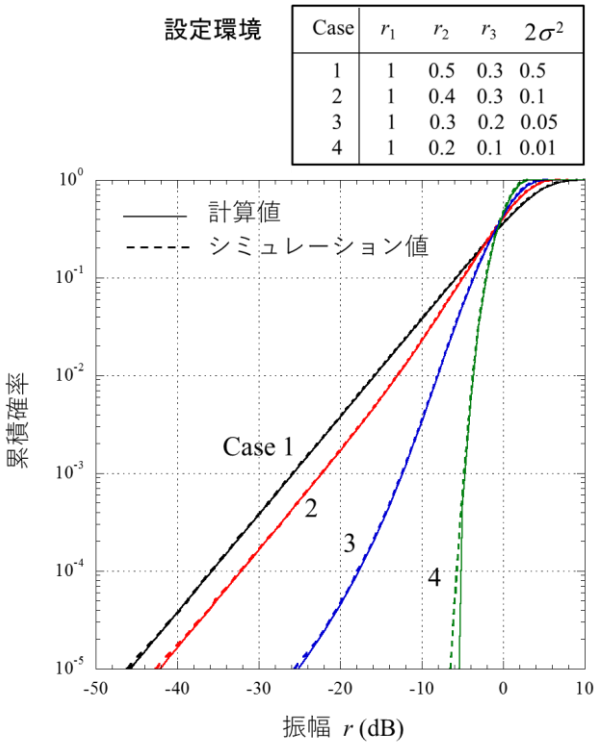


図 4.8　振幅の異なる 3 定常波と 1 不規則波の合成信号振幅の累積分布

4.4　Loo 分布

見通しの良い LOS 環境では、直接波と周囲からの散乱波の合成となり、振幅変動は仲上・ライス分布が良い近似になる。また、直接波が完全に遮られてしまう NLOS 環境では、散乱波のみの集まりとなるため、レイリー分布で表されるであろう。その中間状態として、樹木等で直接波が若干の減衰を受ける環境については、すなわち、樹木が立ち並ぶ道路を自動車が走る場合のような環境では、図 4.9 に示すモデルが提案されている[9]。この場合は、直接波の信号レベルは対数正規分布、散乱波の信号はレイリー分布となり、受信信号はこの二つの成分の合成である。このモデルは、提案者の名を採って Loo モデルと呼ばれ、特に、衛星通信での代表的な伝搬モデル（roadside-shadowing model）である。

Loo 分布は図 4.10 の成分構成図より、次式で表される。

$$f_{Loo}(r;\sigma_R,\mu_{LN},\sigma_{LN}) = \int_0^\infty \underbrace{f_{NR}(r;r_0,\sigma_R)}_{\text{直接波振幅 } r_0 \text{ とする仲上-ライス分布}} \underbrace{f_{LN}(r_0;\mu_{LN},\sigma_{LN})}_{\text{変数 } r_0 \text{ が対数正規分布}} dr_0$$

$$= \frac{r}{\sqrt{2\pi}\sigma_{LN}\sigma_R^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_R^2}\right)\int_0^\infty \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_R^2}-\frac{(\ln x-\mu_{LN})^2}{2\sigma_{LN}^2}\right)I_0\left(\frac{xr}{\sigma_R^2}\right)dx \quad (4.24)$$

分布の構造は極めて明確であるが、積分が残っていて数値計算にはありがたくない形である。そのため、後述の仲上m分布で近似するなどの使い方もされている[10]。

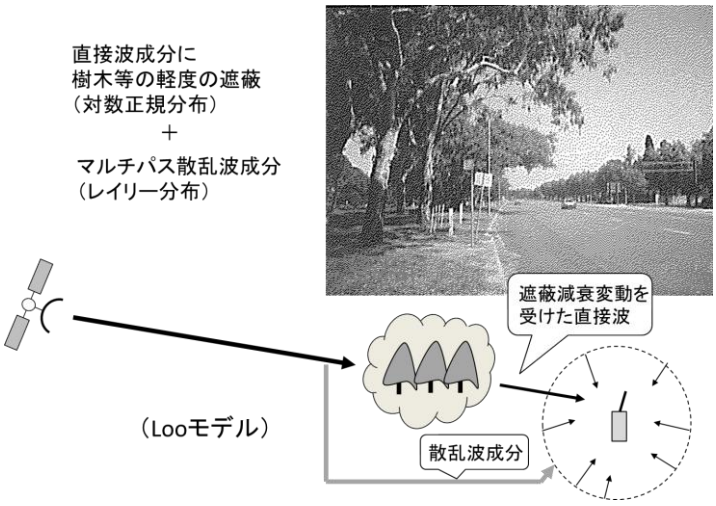


図 4.9　Loo モデル（roadside-shadowing model）

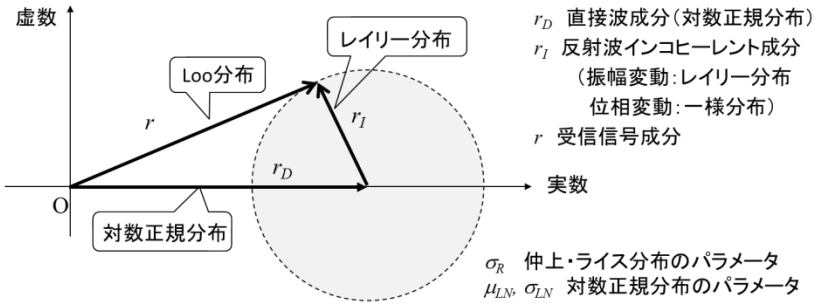


図 4.10　Loo 分布の成分構成図

4.5　レイリー・対数正規重畳分布

市街地における移動伝搬では、短区間での強度変動がレイリー分布に従い、そのパラメータであるσ（や平均電力 $2\sigma^2$）が対数正規分布するというモデルが一般的に用いられる。これに距離特性を加えれば奥村モデルであり、その構造は図 4.11 のように表される。この構造のうち、同図の点線枠で示したレイリー分布と対数正規分布の部分をまとめて一つにした分布が**レイリー・対数正規重畳分布**である。この定式化が Suzuki によってなされたので[11]、**Suzuki 分布**とも呼ばれる。

この分布は次式で与えられる。

$$f(r;\mu,\lambda)=\int_0^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda\sigma}\exp\left(-\frac{(\ln\sigma-\mu)^2}{2\lambda^2}\right)}_{\text{パラメータ}\sigma\text{が対数正規分布}}\times\underbrace{\left[\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]}_{\substack{\text{パラメータ}\sigma\text{ が一定の下で}\\ \text{変数 } r \text{ がレイリー分布}}}d\sigma$$

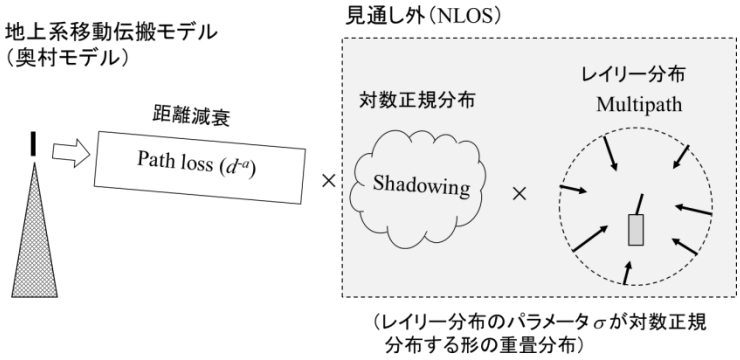


図 4.11　見通し外移動通信の伝搬構造（奥村モデル）

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda}\int_0^{\infty}\frac{r}{\sigma^3}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}-\frac{\left(\ln\sigma-\mu\right)^2}{2\lambda^2}\right\}d\sigma \qquad (4.25)$$

ここで、μとλは分布のパラメータで、$\ln\sigma$ の平均と標準偏差を与える。λ=0 の極限、すなわち、σ が一定の場合において、$2\sigma^2$=1 (=0dB)で与えられるレイリー分布に一致するようμを定めると $\mu=-(\ln 2)/2$ である。この場合の累積分布は次式である。

$$F\left(r;\mu=-\frac{\ln 2}{2},\lambda\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}-r^2\exp\left(-2\lambda u\right)\right\}du \qquad (4.26)$$

移動通信の短区間中央値変動のように、dB 値変動の標準偏差σ_{dB}[dB]が与えられる場合には、$\lambda=\sigma_{dB}/(20\log_{10}e)$ (=0.115 σ_{dB})とおいて分布が計算できる。図 4.12 はレイリー・対数正規重畳分布（Suzuki 分布）の計算例で、一般的に使われている短区間中央値変動 6dB を中心に示している。この分布の積分の意味は明確であるが、Loo 分布と同様、積分を含んでいて計算しやすい形ではないため、仲上m分布やワイブル分布、あるいは、K 分布で近似する方法も試みられている。σ の変動が比較的大きいときは、全体を対数正規分布（図 4.12 の正規確率紙上で直線になる）で近似すると良いことが分かる。

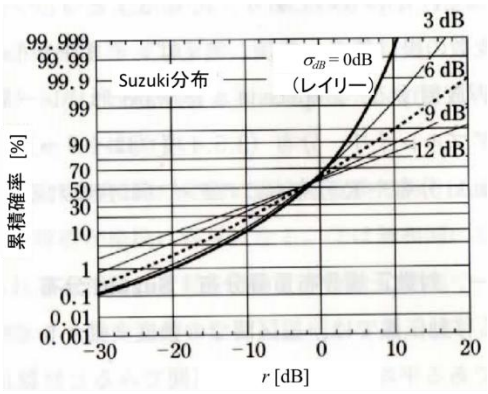


図 4.12　レイリー・対数正規重畳分布（Suzuki 分布）の累積分布の計算例

4.6　仲上-ホイト分布

仲上-ホイト分布も仲上-ライス分布で述べたと同じような歴史をもつ。わが国では、仲上稔・佐々木哲夫により、1942 年に電気通信学会誌に発表されている[12]。同じ式は、米国ベル研究所の R. S. Hoyt により、1947 年にベル研の技術誌 BSTJ に発表されている[13]。仲上自身はこの分布を q 分布と呼んだが、現在では、仲上-ホイト分布と呼ばれている。(Rice 分布と同様、Hoyt 分布として使われている場合も多い)。本節はこの分布を詳しくまとめる（注 1)。歴史の順序に従えば、仲上の方法（q 分布）から説明すべきなのであるが、分布の構造の理解にはホイトの方法が向いているので、最初にホイトの方法で説明する。

【注 1：分布の有効性（適用例）は、仲上が生み出した仲上-ライス分布（ｎ分布）やｍ分布に比べて低いと言わざるを得ないが、我が国発の仲上三分布（ｎ・ｑ・ｍ分布）の歴史も知ってもらいたいと思い、その記述にかなりのスペースを割いている。歴史に興味ないと思う読者はスキップしてほしい】

4.6.1　仲上-ホイト分布の形

ホイトは、通信とか電波とかその応用目的を示さず、分散の異なる 2 次元正規分布の合成振幅 r を求める数学問題として解析を行っている。独立な二つの確率変数 X と Y があり、変数 X を $N(0,\sigma_x^2)$の、変数 Y を $N(0,\sigma_y^2)$の正規分布とする。この結合確率密度関数 f_{XY} は次式である。

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} \tag{4.27}$$

このように土俵を設定すれば、$X=R\cos\Theta$, $Y=R\sin\Theta$として、$(X, Y) \rightarrow (R,\Theta)$に変数変換すれば、$R$ とΘの結合確率密度関数 $f_{R\Theta}$は容易に求まり次式になる。

$$f_{R\Theta}(r,\theta)=f_{XY}(x,y)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sigma_x^2}+\frac{\sin^2\theta}{\sigma_y^2}\right)\right)$$

$$=\frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{r^2}{4}\left\{\frac{1}{\sigma_x^2}+\frac{1}{\sigma_y^2}+\left(\frac{1}{\sigma_x^2}-\frac{1}{\sigma_y^2}\right)\cos 2\theta\right\}\right)$$

ゆえに、変数 R の確率密度関数は

$$f_R(r)=\int_0^{2\pi} f_{R\Theta}(r,\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{r}{\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}+\frac{1}{\sigma_y^2}\right)r^2\right)I_0\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}-\frac{1}{\sigma_y^2}\right)r^2\right) \tag{4.28}$$

$$\left(\because \quad I_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{t\cos\phi} d\phi \right)$$

となる。これが、**仲上-ホイト分布**の形である。σ_x=σ_yとすればレイリー分布に、σ_xかσ_yのどちらかを 0 にすれば半ガウス分布（平均値 0 の正規分布の変数 X を R=|X|にした分布）になる。

なお、仲上は、この後述べる自らによる分布発表からおよそ 20 年後の 1964 年、変数 X と Y が相関係数ρで関係づけられる２次元正規分布の結合確率密度関数

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_x^2} \right) \right\}$$

より、

$$f(r) = \frac{2r}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) r^2 \right) I_0\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) r^2 \right) \tag{4.29}$$

$$\alpha = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{\left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2\right)^2 + 4\rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

$$\beta = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{\left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2\right)^2 + 4\rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

を示している[14]。(4.28)式が一般化された（＝有相関に拡張された）と思えば良いであろう。

4.6.2　仲上による分布の導出と電波環境

レイリー分布や仲上-ライス分布では、各素波の位相の変化範囲が2πを越え、位相分布として0～2πで一様な場合を想定したが、ここでは、その変化幅がπに比べて狭いような環境を考える。それがどういう伝搬環境で生まれるかについては最後に考察するが、先ずはこの条件での確率分布の導出を行う。

これは言うは易く難しい問題である。具体的にいろいろの条件を仮定しなければとても解けそうにないし、解けたとしてその解釈の問題もある。ここでは、 整理されてまとめられた[15]に基づき、その大筋を示したい。(式の導出手順や式の詳しい説明は省いているので、それを知りたい読者は[12]または[15]を見てほしい)。

出発点を以下のように置く。

$$x = \sum_{i=1}^{N} r_i \cos\theta_i, \quad y = \sum_{i=1}^{N} r_i \sin\theta_i$$

素波の位相θ_iは、$_0\theta_i$を中心に比較的狭い範囲で動くものとする。２変数μ, νの２次元ハンケル変換形特性関数により、振幅 r の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(r)=\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}J_0\left(r\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right)\prod_{i=1}^{N}g_i\left(\mu,\nu\right)d\mu d\nu \tag{4.30a}$$

$$g_i\left(\nu,\mu\right)=\int_{\theta_{i,\min}}^{\theta_{i,\max}}f_{\theta,i}\left(\theta_i\right)\exp\left\{-j\left(\mu\cos\theta_i+\nu\sin\theta_i\right)r_i\right\}d\theta_i \tag{4.30b}$$

ここで、$f_{\theta,i}$は、変数θ_iの確率密度関数である。

上式は変数μ, ν の十分小さな範囲だけを考えても十分な近似が得られるため、r_iに大きな差が無く、かつ、Nが十分大きければ、次式の近似が成り立つ。

$$\prod_{i=1}^{N}g_i\left(\mu,\nu\right)\approx\exp\left(-jA_{10}\mu-jA_{01}\nu-2A_{11}\mu\nu-A_{20}\mu^2-A_{02}\nu^2\right) \tag{4.31}$$

ここで、係数A_{10}～A_{02}の各値は次式で与えられるが、素波の数Nが十分大きく、かつ、${}_0\theta_i$が各象限に均等に分配されている場合、A_{10}, A_{01}, A_{11}は0と見なしてもよいであろう。

$$A_{10}=\sum_{i=1}^{N}r_i\left\langle\cos\theta_i\right\rangle\cos{}_0\theta_i\approx0 \tag{4.32a}$$

$$A_{01}=\sum_{i=1}^{N}r_i\left\langle\cos\theta_i\right\rangle\sin{}_0\theta_i\approx0 \tag{4.32b}$$

$$A_{11}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}r_i^2\left\langle\cos2\theta_i\right\rangle\sin2{}_0\theta_i\approx0 \tag{4.32c}$$

$$A_{20}=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{N}r_l^2+\sum_{i=1}^{N}r_i^2\left\langle\cos2\theta_i\right\rangle\cos2{}_0\theta_i\right) \tag{4.32d}$$

$$A_{02}=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{N}r_i^2-\sum_{i=1}^{N}r_i^2\left\langle\cos2\theta_i\right\rangle\cos2{}_0\theta_i\right) \tag{4.32e}$$

そうすると、(4.30a)式の確率密度関数$f(r)$は、次式で近似できる。

$$f(r)\approx\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-A_{20}\mu^2-A_{02}\nu^2\right)J_0\left(r\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right)d\mu d\nu \tag{4.33}$$

さらに上式を変形してゆくと、結局、次式になる。（上記近似式を等式で置き換えている）

$$f(r)=\frac{r}{2\sqrt{A_{02}A_{20}}}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\left(\frac{1}{A_{20}}+\frac{1}{A_{02}}\right)\right\}I_0\left\{\frac{r^2}{8}\left(\frac{1}{A_{20}}-\frac{1}{A_{02}}\right)\right\} \tag{4.34}$$

これが仲上が導いたｑ分布（すなわち、仲上-ホイト分布）である。式中のパラメータを表す文字は違っているが、ホイトが導いた(4.29)式と同じ形であることがわかる（繰り返すが仲上等の発表の方が５年早い）。(4.34)式ではA_{02}とA_{20}の比η（$=A_{02}/A_{20}$）が分布の形を決めるパラメータになり、値は0から無限大の範囲にある。同式より、$A_{20}=A_{02}$、すなわち$\eta=1$のとき、確率密度関数はレイリー分布になる。また、$A_{02}<<A_{20}$（$\eta\rightarrow0$）、あるいは、$A_{02}>>A_{20}$（$\eta\rightarrow\infty$）のとき、半ガウス分布に漸近する。

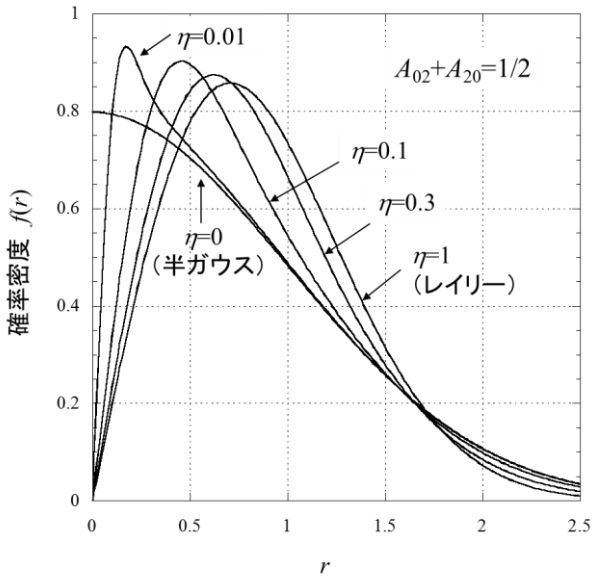


図 4.13　全電力を 1 に正規化した状態でのη=0～1 に対する仲上-ホイト分布の確率密度関数

図 4.13 は、全電力を 1 に正規化した状態（$A_{02}+A_{20}$=1/2、(4.29)式では$\sigma_x^2+\sigma_y^2$=1）でのη=0～1 に対する仲上-ホイト分布の確率密度関数を示している。

レイリー分布より変動が大きくなる現象、特に、半ガウス分布に近くなる現象がどういう電波環境で起きるのであろうか。例として、η→0、すなわち、A_{02}→0 の環境を見てみよう。式(4.32e)より A_{02} が 0 に近づくためには、素波の位相θ_i が 0 かπ方向に揃っている（その方向に集中している）ときである。この式だけでは、0 とπのどちらか一方でもよいのであるが、式(4.32a,b)中の<cosθ_i>をほぼ 0 として進めてきたのであるから、そうなるためには、位相 0 とπの素波はほぼ等しい数になること（＝一方に偏らないこと）が要請される。この電波環境のイメージを図 4.14 に示す。それぞれの素波は、$_0\theta_i$=0 かπ付近を向き、それを中心に、比較的狭い範囲で位相が変化している。そうすると、平均値は打ち消されて 0 付近になるが、位相の変動分はその直交方向であるので、合成信号は図の y 軸に長軸をもつ楕円に近い形になるだろうと理解できる。η=0 ではこれが、完全に y 軸に揃い、受信信号（複素数信号）で見れば正規分布、その振幅 r であれば、値が正方向だけの正規分布、すなわち半ガウス分布になると言うわけである。

近年の GHz 帯電波でのマルチパス環境では、短波と違って波長が短く、位相変動は 2πに対して十分大きいので､仲上-ホイト分布が現れる図 4.14 のような環境を探すのは難しいように思う。この分布を生み出す環境が何かほかには無いであろうか。

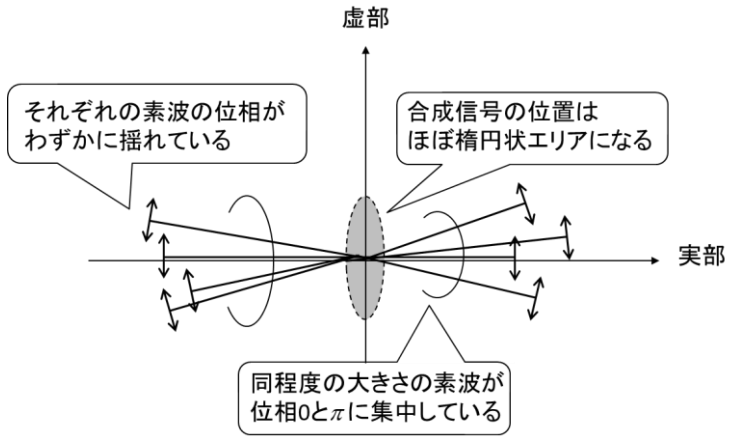


図 4.14　半ガウス分布に近い（＝複素平面状の楕円状エリアに分布する）電波環境の一例

仲上は、後の論文[14]によって、仲上-ホイト分布する伝搬環境の例として、二つのレイリー波の干渉（合成）を示している。振幅が r_1, r_2 の二つのレイリー波の合成を考える。その際のレイリー変動の設定に次の 2 点の仮定を置く。

① 振幅 r_1 と r_2 に関して、その二乗値 r_1^2, r_2^2 が相関係数ρ_P を有する
（レイリー変動する信号の複素振幅 a_1, a_2 に対して相関係数ρ_a が設定されるとき、その電力変動$|a_1|^2$ (=r_1^2)と$|a_2|^2$ (=r_2^2) の相関ρ_P は$|\rho_a|^2$ になる[16]。)

② 2 波の位相差は 0~2π で一様分布とする（＝それぞれの位相は無相関に変動する）

この後述べるように、この設定は一般的なマルチパスフェージング環境には現れ難い。なぜなら、通常は、振幅変動に相関がある場合は、それに伴って位相変動にも相関があるからである。

振幅に相関を有するレイリー変動の結合確率密度関数は、$\Omega_1=<r_1^2>$, $\Omega_2=<r_2^2>$とするとき、次式で表される。

$$f(r_1,r_2)=\frac{4r_1r_2}{(1-\rho_P)\Omega_1\Omega_2}\exp\left\{-\frac{1}{1-\rho_P}\left(\frac{r_1^2}{\Omega_1}+\frac{r_2^2}{\Omega_2}\right)\right\}I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho_P}r_1r_2}{(1-\rho_P)\sqrt{\Omega_1\Omega_2}}\right) \quad (4.35)$$

この確率密度関数のハンケル変換形特性関数 $g(k)$は次式である。

$$g(k)=\int_0^\infty\int_0^\infty J_0(kr_1)J_0(kr_2)f(r_1,r_2)dr_1dr_2$$

$$=\exp\left(-\frac{(\Omega_1+\Omega_1)k^2}{4}\right)I_0\left(\frac{\sqrt{\rho_P\Omega_1\Omega_2}\,k^2}{2}\right) \quad (4.36)$$

式中の 2 重積分解法は、積分公式（例えば、[17] p.46,(62)式）による。

これより、求めたい r の確率密度関数は

$$f(r)=r\int_0^\infty g(k)kJ_0(rk)\,dk$$

$$= \frac{2r}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) r^2 \right) I_0\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) r^2 \right) \tag{4.37}$$

$$\alpha = \Omega_1 + \Omega_2 + 2\sqrt{\rho_P \Omega_1 \Omega_2}\ ,\ \ \beta = \Omega_1 + \Omega_2 - 2\sqrt{\rho_P \Omega_1 \Omega_2}$$

式中の積分解法も積分公式（例えば、[17] p.44,(47)式）による。

(4.37)式において、ρ_P=0 でレイリー分布になり、Ω_1=Ω_2 で、かつ、ρ_P→1 で半ガウス分布に漸近する。このようにして、q 分布の新たな電波環境が示されたことになる。

この環境の前提として二つの条件①と②を課したが、具体的にはどういう電波環境になるのだろう。通常の意味においてレイリー波が 2 波合成されただけだと、相関があっても無くても合成波の振幅はレイリー分布を維持し、仲上-ホイト分布になることは無い。振幅変動に相関があって、位相変動に相関がないと言う環境はどこにあるだろうか。一つのレイリー波が二つに分かれ、それぞれが独立な位相変動を受けて合成されると言うようなことでないと、レイリー分布より深いフェージングは生まれない。例えば、図 4.15 に示すように、レイリーフェージングを受けた電波が非再生中継回路によって再放射された後のマルチパス伝搬である。移動体間を幾重にも繋いでゆく通信とか、むしろこれからの無線通信の中に、仲上-ホイト分布の有用性が再認識されるかもしれない。

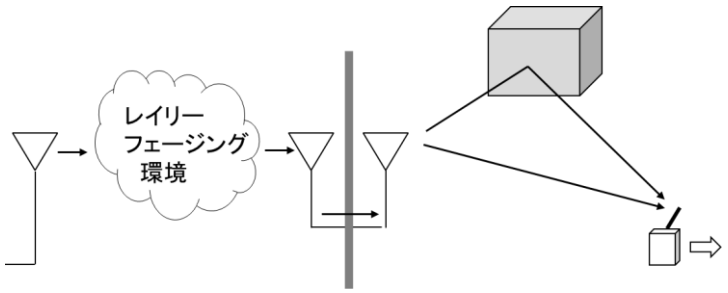


図 4.15　２波のレイリー波の干渉によって仲上-ホイト分布が現れる環境の例（筆者のイメージ）

参考文献

[1] 仲上稔,“位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究（その２）,”電気通信学会雑誌, no. 202, pp. 17-27, 1940.

[2] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” Bell System Tech. Jour. (BSTJ), vol. 23, no. 3, 1994, and vol. 24, no. 1, pp. 46–156, 1945.

[3] 仲上稔、和田俊介、藤村茂幸, “不規則位相問題について,” 電気通信学会雑誌、pp. 1-8, 1953.

[4] 唐沢好男, “仲上三分布（n, q, m 分布）への歴史探訪,” 技術レポート TR-YK-076, 2023: https://www.awcc.uec.ac.jp/radio3/ronbun/TR-YK-076_Nakagami_Distributions.pdf

[5] 森口繁一他, *岩波数学公式III*, 岩波書店, 1993.（新装版）.

[6] 仲上稔, 大野政巳, “位相差が不規則な変化をする多数の振動の合成強度について,” 電気通信学会雑誌, no. 196, pp. 337-345, 1939.

[7] 仲上稔, “位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究（その１）,”電気通信学会雑誌, no. 201, pp. 712-722, 1939.

[8] L. J. Greenstein, D. G. Michelson, and V. Erceg, “Moment-method estimation of the Ricean-Factor,” IEEE Commun. Lett., vol. 3, no. 6, 1999.

[9] C. Loo, "A statistical model for a land mobile satellite link," IEEE Trans. Vehicular Tech., vol. VT-34, 3, pp.122-127, 1985.

[10] Y. Karasawa, “A multi-state channel model composed of line-of-sight and semi-line-of-sight propagation environments for millimeter-wave mobile radio systems,” IEEE Trans. AP, vol. 69, no. 12, pp. 8731-8743, 2021.

[11] H. Suzuki, "A statistical model for urban radio propagation; Multipath characteristics in New York City," IEEE Trans. Comm., COM-25, pp. 673-680, 1977.

[12] 仲上稔、佐々木哲夫、”位相が任意の範囲に於て不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する理論的考察、”電気通信学会雑誌、No. 228, pp. 205-213, 1942.

[13] R.S. Hoyt, "Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate," Bell Sys. Tech. Jour., vol. 26, 2, pp. 318-359, 1947.

[14] M. Nakagami, “On the intensity distribution [ここに q 分布の式が入る] and its application to signal statistics,” Radio Science Journal of Research NBS/USNC-URSI, vol. 68D, o. 9, pp. 995-1003, 1964.

[15] 仲上稔, *短波の特性及び合成受信の研究*, 修教社, 1947.

[16] 唐沢好男, *（改訂）ディジタル移動通信の電波伝搬基礎*, コロナ社, pp. 87-89, 2016.

[17] 奥井重彦, *電子通信工学のための特殊関数とその応用*, 森北出版, pp. 154-160, 1997.

目次のページはこちら