第７章　その他の特徴を有する確率分布

ここまで、伝搬現象における信号の振幅と電力の変動に現れる分布を取り上げてきた。電波伝搬モデルには、振幅や電力の分布以外にも様々な現象を対象とするものがある。ここでは、振幅や電力分類に収まらないその他の特徴をもつ確率分布を解説する。なお、これまでの分布の説明で、変数を物理量毎に x, r, z（確率変数では X, R, Z）と文字を変えてきた。数学的にはこの違いは意味がない。電波伝搬モデルでは、信号の振幅に対応する確率変数には R を、電力の次元の物理量には Z $(=R^2)$を用い、便宜的に使い分けてきただけである。本章で述べる分布には、そのような対応から離れているものや、ワイブル分布のように、この次元が異なる物理量をαの値を変えて表す分布もあるので、そのようなものの確率変数には、一般的な意味で、X を用いている。

note: 本章は初期公開版に対して 2026.08 に大幅に改訂している。

7.1　ワイブル分布

指数分布する確率変数 Z に対して、Z^p となる新たな変数 X

$$X = Z^p \quad \left(Z \geq 0,\ p > 0\right) \tag{7.1}$$

を考える。指数分布を

$$f_{\exp}\left(z\right) = \lambda \exp\left(-\lambda z\right)$$

とおくと、X の確率分布は

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= f_{\exp}\left\{z(x)\right\}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{\lambda}{p} x^{1/p-1} \exp\left(-\lambda x^{1/p}\right) \end{aligned}$$

となる。式中の p を $1/\alpha$と置くと、上式は以下のように整理される。

$$f\left(x\right) = \alpha\lambda x^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda x^{\alpha}\right) \qquad \left(\alpha, \lambda > 0\right) \tag{7.2}$$

この分布は**ワイブル分布**（Weibull distribution）と呼ばれる。α=1 は指数分布、α=2 はレイリー分布を表す。この様にパラメータαの値によって物理的意味が違ってくるが、(7.1)式で与えたように、Z が指数分布する現象における、Z の $1/\alpha$乗の分布と捉えておくのが良いと思う。ワイブル分布はレイリー分布と指数分布をつなぎ、それを延長した分布と位置付けられる。累積分布関数は次式で与えられる。

$$F\left(x\right) = 1 - \exp\left(-\lambda x^{\alpha}\right) \tag{7.3}$$

信頼性の分野では、時刻 t まで故障しない確率を式(7.3)より、$\exp(-\lambda t^{\alpha})$と定める。$\alpha$=1 のときは、時間に対して故障率が一定となる性質（指数分布に従うポアソン過程)、すなわち偶発的な故障を扱う。これに対して、α<1 では時間と共に故障率が小さくなる場合（＝初期不良による故障)、α>1 では時間と共に故障率が大きくなる場合（＝磨耗的な故障）を扱う。物理的にはこのような意味がある。

電波伝搬の分野では、理論から導かれるものでは無いが、２つのパラメータ値を適当に定めることによって、レイリー分布を中心とする多様な分布形が表現できるため、レーダ観測における海面クラッタ、地面クラッタの強度を近似する分布などに用いられている[1]。クラッタとは海面や地面のような周囲の媒質に反射されてくる雑音電波で、目的物（ターゲット）の探索に妨害を与えるものである。

7.2　一般化ガンマ分布（Stacy 分布）

レイリー分布と指数分布を包含する分布がワイブル分布であった。ワイブル分布のパラメータをもう一つ増やしてガンマ分布を包含する分布があれば、より一般的な分布になる。ガンマ分布を一般化させた分布ともいえ、結果として仲上m分布も包含できる。この分布の形は以下の式で表される。

$$f\left(x;\alpha,\beta,\gamma\right)=Ax^{\alpha-1}\exp\left(-\beta x^{\gamma}\right)\qquad\left(\alpha,\beta,\gamma>0\text{ for }0\le x<\infty\right)\qquad(7.4)$$

$$A\equiv\frac{\gamma\beta^{\alpha/\gamma}}{\Gamma\left(\alpha/\gamma\right)}$$

この分布は**一般化ガンマ分布**（generalized Gamma distribution）と呼ばれ、Stacy により提示されたものなので[2]、**Stacy 分布**（Stacy distribution）とも呼ばれる。

４章～６章において正規分布をルーツとして生まれた確率分布の概要を述べてきたが、それらの大部分の分布が式(7.4)の形で表現できることに気づくであろう。例えば、仲上 m 分布では(α, β, γ)に対して$(2m,m/\Omega,2)$、ワイブル分布では(α,β,α)のようにである。

この分布の平均$\langle X\rangle$、自乗平均$\langle X^2\rangle$及び分散σ_x^2は、おのおの次式となる。

$$\left\langle X\right\rangle=\frac{\Gamma\left\{\left(\alpha+1\right)/\gamma\right\}}{\Gamma\left(\alpha/\gamma\right)\beta^{1/\gamma}}\qquad(7.5a)$$

$$\left\langle X^2\right\rangle=\frac{\Gamma\left\{\left(\alpha+2\right)/\gamma\right\}}{\Gamma\left(\alpha/\gamma\right)\beta^{2/\gamma}}\qquad(7.5b)$$

$$\sigma_x^2=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha/\gamma\right)\beta^{2/\gamma}}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\gamma}\right)-\frac{\left[\Gamma\left\{\left(\alpha+1\right)/\gamma\right\}\right]^2}{\Gamma\left(\alpha/\gamma\right)}\right]\qquad(7.5c)$$

表 7.1　一般化ガンマ分布[$A\,x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^{\gamma})$]に含まれる分布の整理（確率変数 X の範囲：$X\geq 0$）

分布名	α	β	γ	A	パラメータ範囲	備　考
半ガウス	1	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}$	$\sigma>0$	
レイリー	2	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2	$\frac{1}{2\sigma^2}$	$\sigma>0$	m=1の仲上m分布 α=2のワイブル分布
指数	1	λ	1	λ	$\lambda>0$	ν=1のガンマ分布 α=2のワイブル分布
ガンマ	ν	β	1	$\frac{\beta^{\nu}}{\Gamma(\nu)}$	$\nu>0,\ \beta>0$	
カイ二乗	$\frac{n}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$	$n\geq 1$の整数	$\nu=\frac{n}{2},\ \beta=\frac{1}{2}$ のガンマ分布
仲上m	$2m$	$\frac{m}{\Omega}$	2	$\frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m}$	$\Omega>0,\ m\geq\frac{1}{2}$	
ワイブル	α	λ	α		$\alpha>0,\ \lambda>0$	

表 7.1 はこれまで取り上げた分布のうち、一般化ガンマ分布に含まれるものを、$\alpha, \beta, \gamma,\ A$ についてまとめている。

３パラメータで構成される一般化ガンマ分布は、大部分の分布を含む故に、直接に物理的意味を述べることは難しい。パラメータの特徴として、αとβはガンマ分布の場合と同様、それぞれを“形状パラメータ”、“スケールパラメータ”と呼ぶのがふさわしい。γは“次元パラメータ”（的なもの）で、γ=1 では電力次元の変動を、γ=2 では振幅次元の変動を表わす場合が多い。ワイブル分布はこの次元をパラメータにしている点に、ほかにみられない特徴がある。

一般化ガンマ分布が３パラメータで構成され多くの分布を包含する故に、伝搬データなど実測データから分布を推定する場合には尤度の高い分布となるであろう。しかし、伝搬モデルとしてこの一般化ガンマ分布を採用するかどうかは、第９章に述べる AIC（赤池情報量規準）の考え方を参考にして決めてほしい。

7.3　極値分布（グンベル分布）

確率密度関数 f、累積分布関数 F に従う母集団があり、そこから n 個の標本を得たとする。このときの最大値の確率分布（確率密度関数 $f_{\max}$、累積分布関数 F_{max}）は次式になる。

$$F_{\max}(x)=F^{n}(x) \tag{7.6}$$

$$f_{\max}(x)=\frac{dF_{\max}}{dx}=nF^{n-1}(x)f(x) \tag{7.7}$$

この最大値の分布の形は、標本数 n が無限大の極限において、元の分布に依存しない三つのタイプ（**グンベル**（Gumbel；ガンベルとも訳される）**分布**、フレッシェ（Fréchet）分布、負のワイブル分布）のどれかに収斂することが知られ、**極値分布**と呼ばれる[4]。個々の確率分布の極値分

布がどの形になるかを機械的に分類することは困難であるが、分布の右袖が指数関数的に減少する連続分布（電波伝搬モデルでお馴染みの正規分布、レイリー分布、仲上 m 分布、仲上・ライス分布、指数分布、ガンマ分布、対数正規分布など）では、グンベル分布型になる。グンベル分布（確率密度関数 f_G、累積分布関数 F_G）は次式で表される。

$$F_G(z) = \exp\{-\exp(-z)\} \qquad (-\infty < z < \infty) \tag{7.8}$$

$$f_G(z) = e^{-z} F_G(z) = \exp\{-z - \exp(-z)\} \tag{7.9}$$

$$z(x) = \frac{x - b_n}{a_n}$$

分布のパラメータである規格化の係数 a_n, b_n は**吸引係数**とも呼ばれる。吸引係数は元になる変数の確率分布によって異なり、n の関数で与えられる（もとの分布が代表的なものに対する係数 a_n, b_n の式は[4]（の表 2.4）に与えられている）。グンベル分布の確率変数 X の各種統計値は次式になる。

期待値　$b_n + \gamma a_n$　　（γ=0.57721…（オイラーの定数））

中央値　$b_n - a_n \log\log 2$

最頻値　b_n

分散　$\pi^2 a_n^2 / 6$

一般的な分布から(7.9)式を導くのは難しいが、例えば、元の分布に指数分布を与えれば(7.8)式に容易にたどり着くので、確認してみてほしい。図 7.1 はグンベル分布の累積分布と確率密度関数を示している。

極値分布（グンベル分布）は、最大値データの統計に力を発揮し、そのような統計は**極値統計**と呼ばれる。極値統計の説明とその応用例については、第 2 部の 11 章で取り上げている。

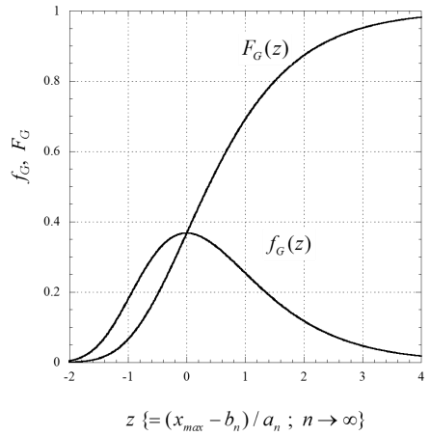


図 7.1　グンベル分布

7.4　多変量正規分布

多変量正規分布の確率密度関数は次式で与えられる。変量の数を N、共分散行列（あるいは相関行列とも呼ばれる）をΣとしている。

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_N\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{N/2}\left|\Sigma\right|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\right\} \qquad (7.10)$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_N\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_N\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \left\langle\left(X_i-\mu_i\right)^2\right\rangle=\sigma_i^2$$

$$\Sigma=\left\langle\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\right\rangle=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_N\rho_{1N}\\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_N\sigma_1\rho_{N1} & \sigma_N\sigma_2\rho_{N2} & \cdots & \sigma_N^2\end{pmatrix}\quad\left(\rho_{ij}=\rho_{ji}\right)$$

以下の手順に従って、この式を導く。先ず、各変数をお互い無相関の標準正規分布に従う確率変数 $U_1, U_2, \cdots, U_N$ を用いて次のように表してみよう。

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{N1} & a_{N_2} & \cdots & a_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\\vdots\\U_N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_N\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\boldsymbol{X}=A\boldsymbol{U}+\boldsymbol{\mu}$$

共分散行列Σと係数行列 A が以下の関係になる。

$$\left\langle\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\right\rangle=AA^{\mathrm{T}}=\Sigma$$

確率変数 U_1～U_N の同時確率密度関数 f_U は、お互い無相関なので、個々の分布の積となり、次式である。

$$f_U\left(u_1,u_2,\cdots,u_N\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{N/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right)$$

また、

$$\boldsymbol{u}=A^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)$$

なので、式中の $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ の部分が、

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}A^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)=\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)$$

であり、上式の右辺で置き換えられる。また、変数 U を変数 X へ変換するときのヤコビアン J は

$$J=\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|=\left|A^{-1}\right|=\sqrt{\left|\Sigma^{-1}\right|}=\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}$$

であるので、求めたかった確率分布は

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_N\right)=\frac{J}{\left(2\pi\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right\}$$

となり、上式の J と $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ に先に求めた式を代入すれば、冒頭の(7.10)式になる。

(7.10)式で N=2、相関係数をρとすれば次式の２変量正規分布（同時確率密度関数）が得られる。

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] \quad (7.11)$$

多変量正規分布は、それをそのまま使うというよりは、これを原点としてそこから様々に生まれる確率分布を体系的に理解するのに役に立つ。これに関しては、技術レポート TR-YK-090（本書の目次リストに補足資料として挙げている）に詳しくまとめているので、そちらを見てほしい。本書の４章～６章に取り上げた分布の大部分は、多変量正規分布の系統に属する。例えば、レイリー分布、仲上-ライス分布、仲上-ホイト分布は２変量正規分布のノルムの分布として、また、カイ分布や仲上m分布は多変量正規分布のノルムの分布と位置付けられる。

7.5　多変量レイリー分布と多変量指数分布

無線通信の伝搬モデルに現れる確率分布は、複素平面上に現れる信号変動を表すものが多いため、xy 平面上での等分散・無相関の現象を扱うのが一般的である。仲上・ホイト分布のように不等分散・有相関まで範囲を広げても、それを使わなければいけないモデルはあまり出てこない。一方、個々の複素平面上では、等分散・無相関であるが、この平面を単位として、平面間には相関をもつモデルはダイバーシチ合成を検討するような際には必要になる。個々の面での振幅確率はレイリー分布、電力確率は指数分布であるが、複数の変量間には相関があると言う意味である。

7.5.1　多変量レイリー分布の一般式

それぞれの分散が異なる M 個のレイリー分布する変量があり、それらには相関行列Σで与えられる相関がある場合を対象とし、これを**多変量レイリー分布**と呼ぶ。このときの同時確率分布は以下の形になろう。

$$f\left(r_1, r_2, \cdots, r_M; \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_M; \Sigma\right) = ? \tag{7.12}$$

$$f_{R_m}\left(r_m\right) = \frac{r_m}{\sigma_m^2}\exp\left(-\frac{r_m^2}{2\sigma_m^2}\right) \quad \left(m = 1, 2, \cdots, M\right)$$

$$\Sigma = 2\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1M}\sigma_1\sigma_M \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2M}\sigma_2\sigma_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M1}\sigma_M\sigma_1 & \rho_{M2}\sigma_M\sigma_2 & \cdots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}$$

式(7.12)の右辺が?なのは、一般解として得られた分布式がないためである。多変量正規分布の形までは(7.10)式そのもので良いのであるが、振幅の同時確率密度関数（JPDF）を得る最終段階に行う位相変数消去のための周辺化

$$\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f_{R\Phi}\left(r_1, r_2, \cdots, r_M, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_M\right) d\phi_1 \cdots d\phi_M$$

に、M=3 以上では積分が残ってしまい、使いやすい式にならないのである。そのため、この隘路を切り開くべく様々な試みがなされており、具体的なことは[5]やそこに引用されている文献を見てほしい。次項では、手計算で導くことができる M=2 について示す。また、有相関環境フェージングにおける最大比合成（MRC）ダイバーシチへの適用では、同時確率分布が得られなくても相関行列の固有値解析から合成受信電力（あるいは SN 比）を求めることができ、それについては、5 章の 5.5 節で述べた。しかし、選択合成ダイバーシチ等、ブランチ毎の分布を用いて伝送特性を評価したい場合には、このような多変量レイリー分布そのものが必要になる[6]。

7.5.2 ２変量レイリー分布と２変量指数分布

有相関**２変量レイリー分布**は 4 変量正規分布から求められ、以下の式で表される。

$$f\left(r_1, r_2\right) = \frac{4r_1r_2}{\left(1-|\rho|^2\right)\Gamma_1\Gamma_2}\exp\left\{-\frac{1}{1-|\rho|^2}\left(\frac{r_1^2}{\Gamma_1}+\frac{r_2^2}{\Gamma_2}\right)\right\} I_0\left\{\frac{2|\rho|r_1r_2}{\left(1-|\rho|^2\right)\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}\right\} \tag{7.13}$$

$$f_{X_m}(x_m) = f_{Y_m}(y_m) = N\left(0, \sigma_m^2\right) \quad \left(m = 1, 2\right), \qquad \Gamma_m = \left\langle R_m^2 \right\rangle = 2\sigma_m^2$$

この分布は、通信理論の専門書に取り上げられているが（例えば[7]）、オリジナルは S. O. Rice の BSTJ 論文（[8]の後半(1945)の p. 78, Rice 分布を導いた論文）である。導出は技術レポート TR-YK-090 に詳しく示しているので、ここでは割愛する。Z_m=R_m^2 として変数変換すれば**２変量指数分布** $f_Z(z_1,z_2)$が得られる。

$$f(z_1,z_2)=\frac{1}{\left(1-|\rho|^2\right)\Gamma_1\Gamma_2}\exp\left\{-\frac{1}{1-|\rho|^2}\left(\frac{z_1}{\Gamma_1}+\frac{z_2}{\Gamma_2}\right)\right\}I_0\left\{\frac{2|\rho|}{\left(1-|\rho|^2\right)}\sqrt{\frac{z_1z_2}{\Gamma_1\Gamma_2}}\right\} \quad (7.14)$$

3変量レイリー分布も、6変量正規分布から、同様の手順によって求めることができる。ただしこの場合は、位相変数を消す周辺化の積分が一つ残り、2変数のような簡易な式（閉形式で表されるような式）にはならない。分布式及びその導出手順については、技術レポート TR-YK-090 の 5.3 節及びその付録 1 に詳しくまとめているので、必要な場合はそちらを見てほしい。

7.6　マルチクラスタ伝搬モデル

ミリ波等新しい時代の移動通信へのニーズに伴って、伝搬モデルにも多機能性が求められるようになっている。近年提案が増えているマルチクラスタ伝搬モデルがその例である。マルチクラスタモデルは、到来パスが複数のクラスタに分かれていると仮定する伝搬モデルで、Yacoub(2007)によって提案されたκ–μ分布やη–μ分布モデルが代表的である[9]。他にも、より高度化されたモデルが提案されているが、ここでは、κ–μ分布とη–μ分布について、その構造を調べる。

7.6.1　κ–μ分布

伝搬エリア内に複数のクラスタがあり、同一クラスタ内では遅延差が無視でき、クラスタごとには異なる遅延があると言う前提に立つ。このようなクラスタごとの電波を分離識別して最大比合成すると言うイメージである。**κ–μ分布**はクラスタごとには安定した電波が支配的な仲上・ライス分布とし、定常波の強度はクラスタごとに異なり、変動成分の平均電力は同一と言う仮定を採っている。確率分布にはノルム（R）で与える分布とその二乗値（Z）で与えるものが示されているが、ここでは、ノルムのケースのみを示す。

$$f_R(r)=\frac{2\mu(1+k)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\kappa^{(\mu-1)/2}\exp(\mu\kappa)}\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{\mu}\exp\left\{-\mu(1+\kappa)\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right\}I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\,\frac{r}{\hat{r}}\right) \quad (7.15)$$

$$\hat{r}\equiv\sqrt{\langle R^2\rangle}$$

物理イメージとしてはμはクラスタの数、κは定常成分と変動成分の電力比を表すパラメータであるが、この値を適当な値に設定することによって、仲上・ライス分布、レイリー分布、仲上m分布、半ガウス分布など様々な分布を包含する多機能性に富むと主張されている。

基本構造（分布の核）で見れば、非心カイ分布と同じであり、辛口に言えば、新規性に疑問符が付くが、伝搬モデルとして提案されているところに意義を認めることができる。

7.6.2　η–μ 分布

κ–μ 分布ではクラスタ毎のフェージング環境を安定した波が強い（仲上・ライス分布）としたが、**η–μ 分布**ではこの部分をより深いフェージングが生まれる仲上・ホイト分布（q 分布）にしている。式形は省略するがこの後述べる一般式（(7.16)式）の構造の範疇にある。

このように見てくると、クラスタ部分の確率分布をどうするかで、様々な分布が考えられる。そして、既に多くの検討がなされていると思うので、新しいモデルを提案しようとする場合には十分な調査が必要である。

7.7　電波伝搬モデルに現れる確率分布の一般形

４～７章にわたり、電波伝搬モデルに現れる多様な確率分布を見てきた。そして、7.2 節で述べた一般化ガンマ分布（Stacy 分布）がかなりのものを包含することを述べた。しかしそこには、仲上-ライス分布のような非心のものが含まれていない。ここでは、中心/非心, 2 次元/多次元を含んでより一般的な形として、以下の分布形を示しておきたい。

$$f\left(x\right) \propto x^{a} \exp\left(-bx^{c}\right) I_{d}\left(ex^{f}\right) \tag{7.16}$$

I_d は d 次の変形ベッセル関数、a～f は分布のパラメータである。分布のパラメータが６つもあり、自然界の現象（ここでは電波伝搬現象）を何でもかんでもこのモデルに当てはめて、最尤推定をしよう、と言う意味ではない。この一般構造を知ることによって、基本分布である仲上の３分布から、カイ・カイ二乗分布、非心カイ・非心カイ二乗分布を経て、マルチクラスタモデルに至る伝搬モデルの理解を深めたいという意味である。

参考文献

[1] 関根松夫, *レーダ信号処理技術*, 電子情報通信学会, 1991.

[2] E.W. Stacy, "A generalization of the gamma distribution," Annal. Math. Stat., vol. 33, pp. 1187-1192, 1962.

[3] 唐沢好男, *（改訂）ディジタル移動通信の電波伝搬基礎*, コロナ社, 2016.

[4] 高橋倫也, 志村隆彰, *極値統計学*, IMS シリーズ：進化する統計数理５, 近代科学社, 2016.

[5] N. C. Beaulieu, and K. T. Hemachandra, “Novel simple representations for Gaussian class multivariate distributions with generalized correlation,” IEEE Trans. Info. Theory, vol. 57, no. 12, pp. 8072-8083, 2011.

[6] T. Matsumoto, A. Zribi, R. Asvadi, E. Dupraz, and W. Lin, “Two-stage successive Wyner-Ziv lossy forward relaying for lossy communications: Rate-distortion and outage probability analyses,” IEEE Trans. Vehicl. Technol., vol.78, no. 08, pp. 11394-11410, 2024.

[7] W. B. Davenport and W. L. Root, *An introduction to the theory of random signals and noise*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1987（1958 年発行の復刻版）.

[8] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” Bell System Tech. Jour. (BSTJ), vol. 23, no. 3, pp. 282-332. 1994, and vol. 24, no. 1, pp. 46–156, 1945.

[9] M. D. Yacoub, “The κ–μ distribution and the η–μ distribution,” IEEE Antennas Propag. Mag., vol. 49, no. 1. pp. 68-81, 2007.

目次のページはこちら