技術セミナスライド
(公開 Oct. 13, 2026)

無線通信の電波伝搬基礎

～物理現象を確率的に見る･観測データを統計的に読む～

唐沢　好男

セミナーの概要

地上系・非地上系の無線通信における電波伝搬の基礎（特に、考え方）を解説する。電波伝搬は、電波の媒質空間内での振る舞いになるが、自然現象がもたらす不規則変動に対する率視点での理解が大事になる。また、観測データは、そのような確率的振る舞いの結果であり、そこから現象の真の姿を読み取る統計的推定の力も求められる。本セミナでは、自由空間の電波伝搬（スネルの伝達公式・フレネルゾーン）・大気吸収・雨滴吸収・直接波と反射波の2波モデル（ブレークポイント現象）などの電波伝搬の基礎から始め、代表的な確率過程（加法型・乗法型・マルコフ遷移型）とその結果生まれる代表的な確率分布（正規分布・対数正規分布・レイリー分布・仲上−ライス分布など）から、今日に続くマルチクラスタ伝搬モデルまで、確率的なものの見方を解説する。後半の統計的推定では、最も確からしいモデルとは何か（最尤推定）、その判断に誤りはないか（点推定から区間推定へ）、より良いモデルを選ぶには（情報量基準：AIC）について、日本の百年間にわたる強雨の長期統計データを見ながら、統計的推定の考え方をわかりやすく解説する。

セミナの内容

【電波伝搬基礎】

1．自由空間の電波伝搬（フリスの伝達公式・フレネルゾーン）

2．媒質中の電波伝搬（大気吸収・降雨減衰・シンチレーション）

3．2波モデル（ブレークポイント現象）

【マルチパス伝搬モデルと確率分布：構造を見る】

4．確率過程（加法型・乗法型・マルコフ遷移型）

5．マルチパス伝搬モデルに現れる基本確率分布（レイリー分布・仲上−ライス分布・仲上m分布）

6．新しいタイプの伝搬モデル（マルチクラスタ伝搬モデル）

【統計的推定：観測データを読む】

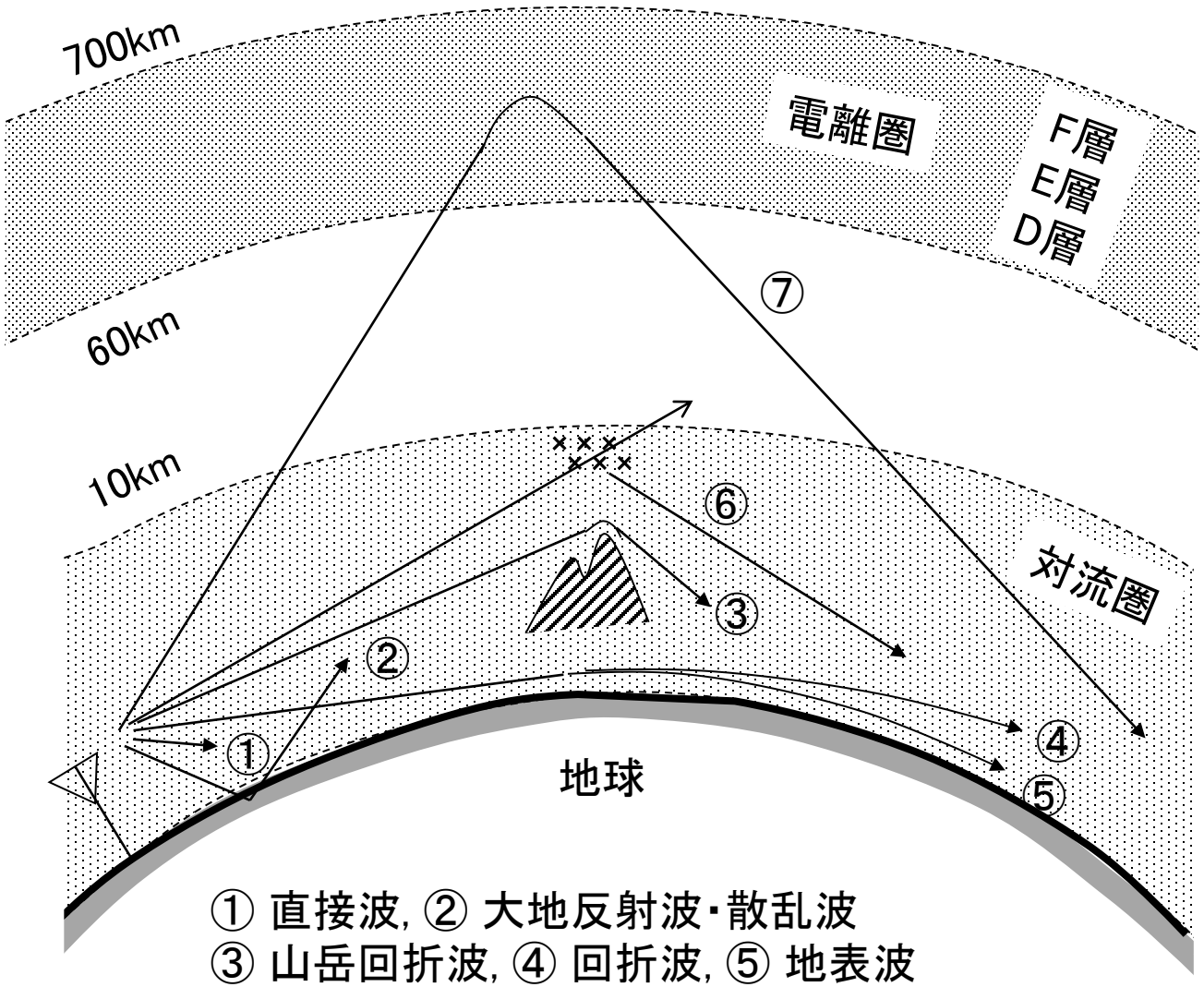
7．最尤推定（最も確からしい推定、点推定）

8．区間推定と信頼区間（間違った判断をしないための）

9．良いモデルとは何か（モデルの選択基準、その代表としてのAIC）

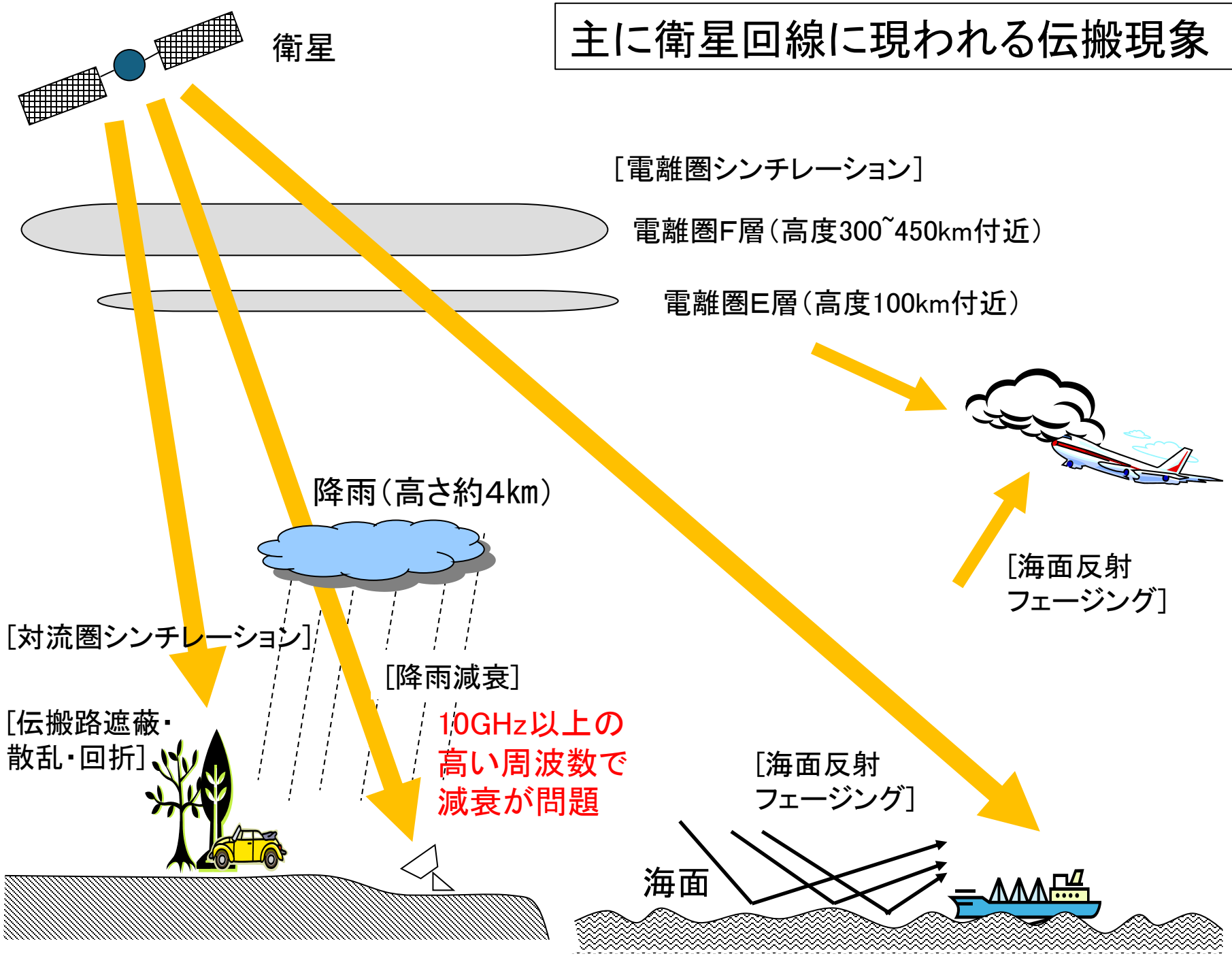
無線通信の電波伝搬

地上系無線回線に現われる伝搬現象

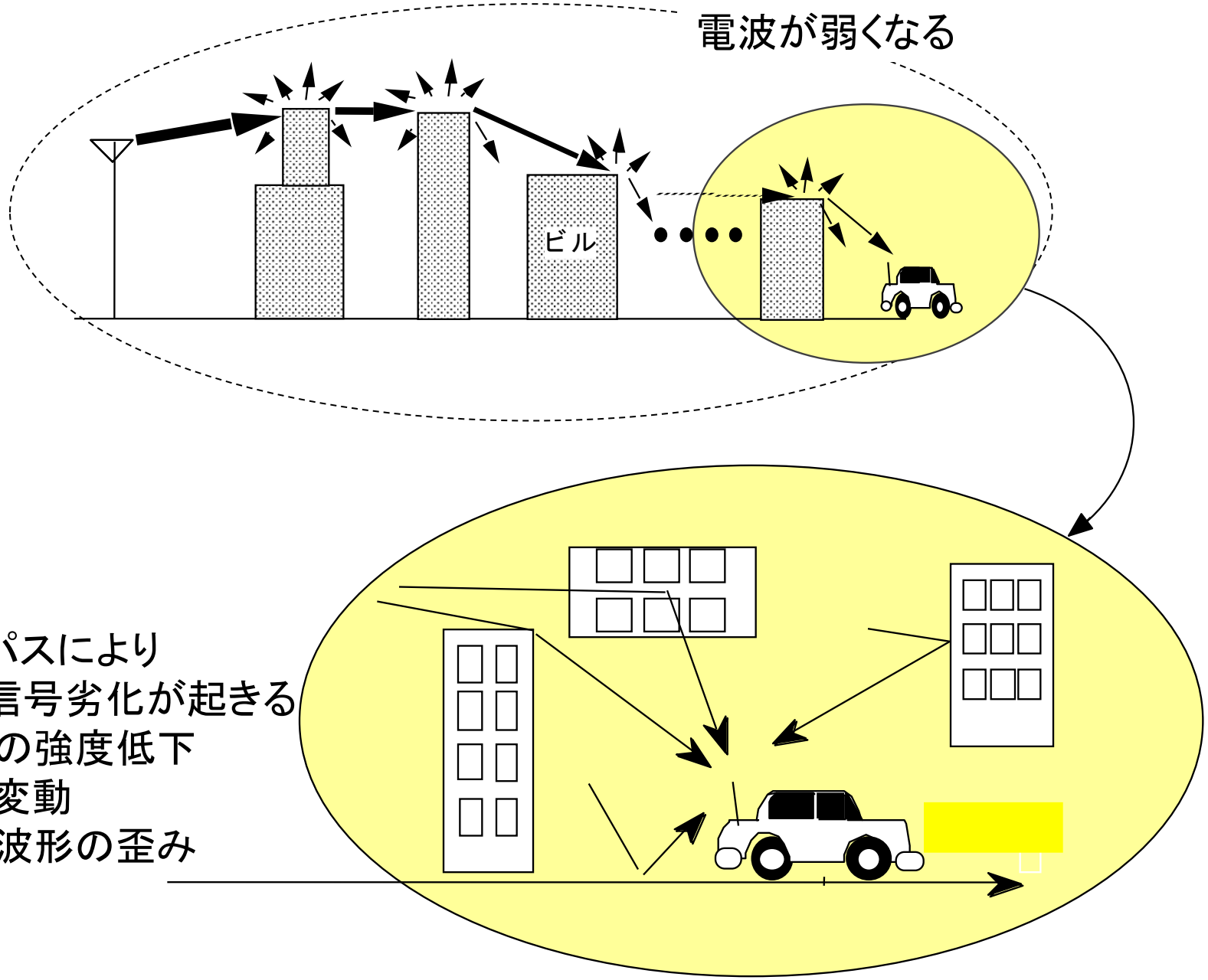


① 直接波, ② 大地反射波・散乱波
③ 山岳回折波, ④ 回折波, ⑤ 地表波
⑥ 対流圏散乱波, ⑦ 電離層（F, E, D層）反射波

主に衛星回線に現われる伝搬現象



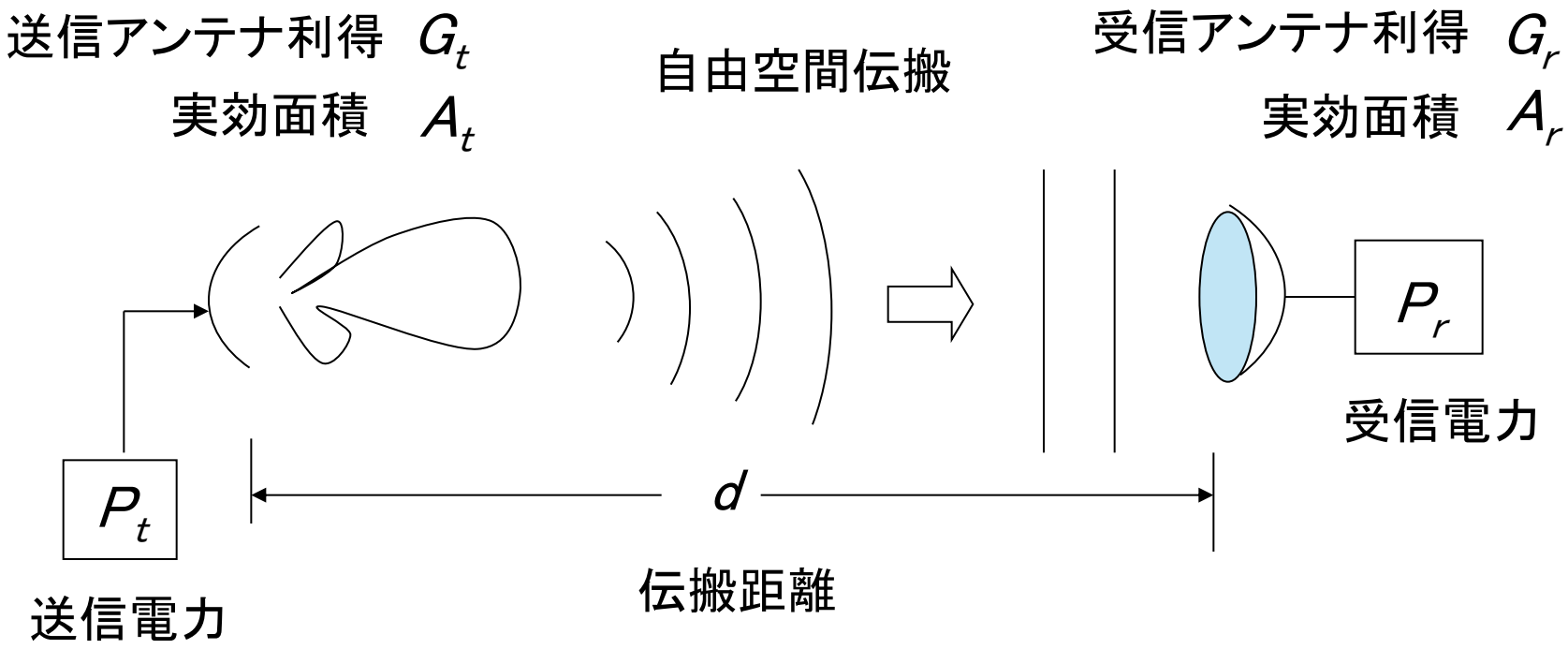
移動通信の電波伝搬



マルチパスにより
様々な信号劣化が起きる
- 電波の強度低下
- 速い変動
- 伝送波形の歪み

【電波伝搬基礎】

無線通信の基本伝送路

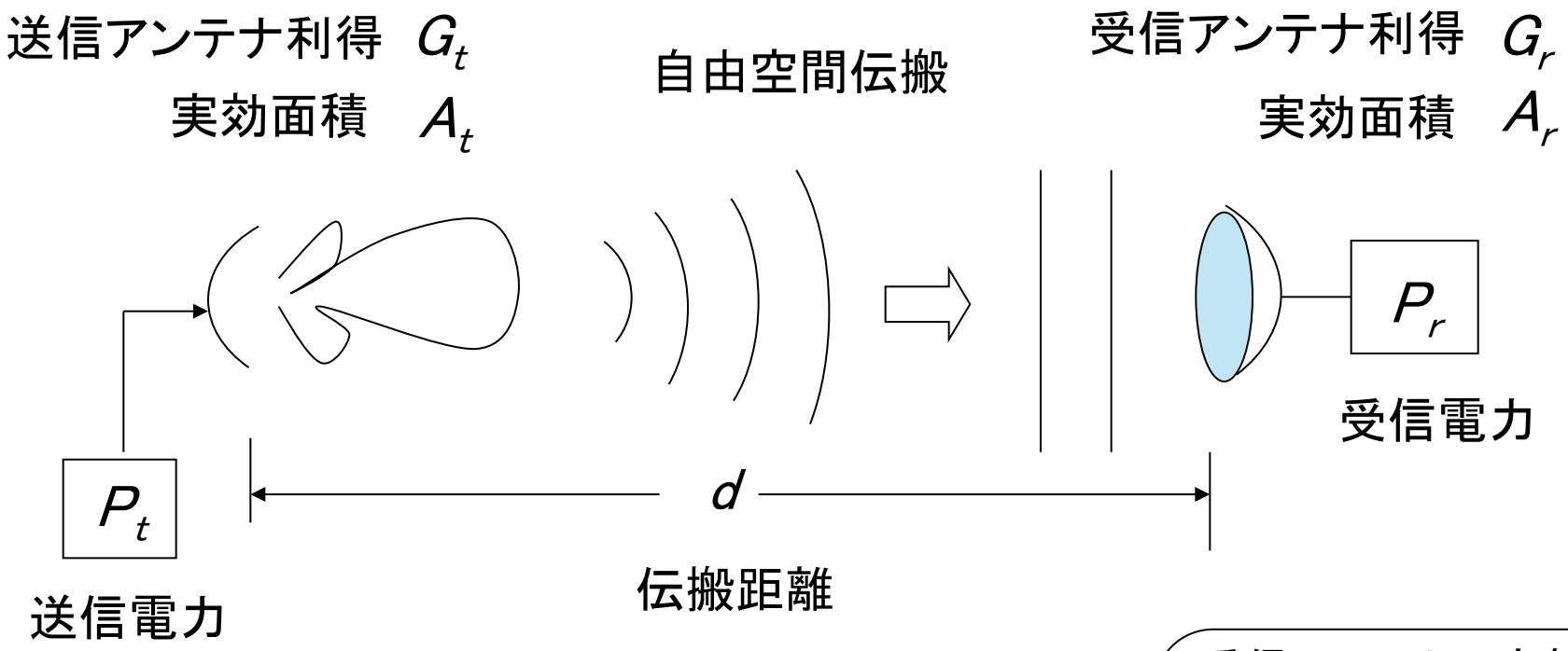


周波数 : f

フリス(Friis)の伝達公式

$$\frac{P_r}{P_t} = ?$$

無線伝送の基本式： フリスの伝達公式



出発点

$$P_r = P_t \times G_t \times \frac{1}{4\pi d^2} \times A_r$$

[W] ： [W]　　[1/m²]　　[m²]

受信アンテナの実効面積
パラボラアンテナのような開口面アンテナであれば、大きさに想像がつくが、ダイポールアンテナのような線状アンテナでは大きさをイメージしにくい

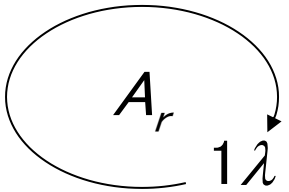
無線伝送の基本式： フリスの伝達公式

この関係式の導出は自明ではない
マクスウェルの方程式を使って
電磁界解析によって求められる

受信アンテナ利得 G_r と実効面積 A_r の関係

$$A_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

（G_r=1のときは、
円周１波長の円の面積）



（周波数2GHz
→ 波長 15cm
→ 直径約5cmの円）

フリスの伝達公式

$$P_r = P_t \; G_t \frac{1}{4\pi d^2} \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \qquad (A_r)$$

$$= \frac{1}{L_p} G_r \; G_t \; P_t$$

自由空間伝搬損：L_p

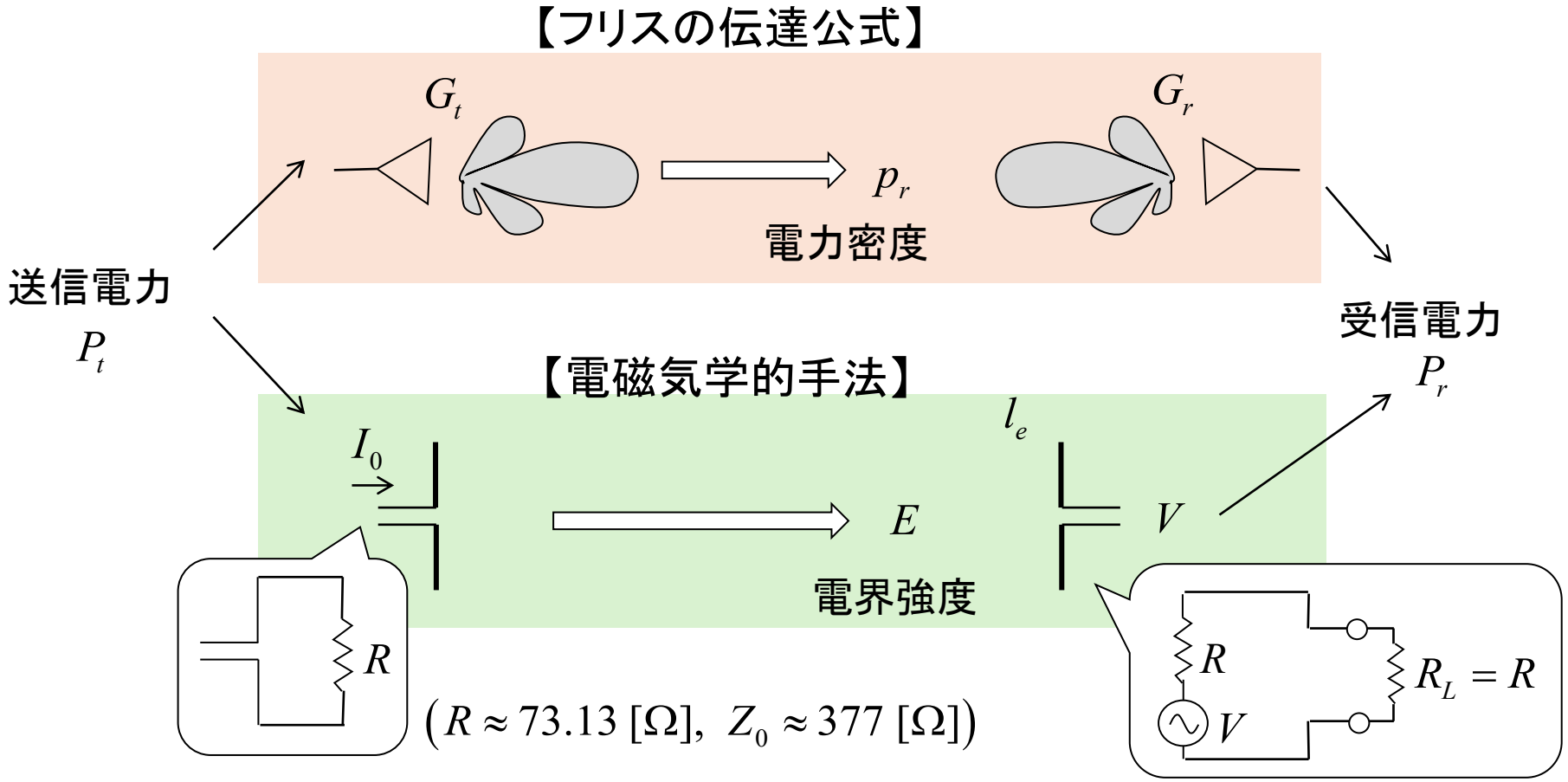
$$L_p = \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2$$

考えてみよう
自由空間の伝搬なのに、
なぜ周波数特性が入るのか？

アンテナの利得が周波数に依存しないとき（半波長ダイポールアンテナ対向など）、
周波数が高くなるほど、受信強度は弱くなる

（フリスの伝達公式の詳しい解説は以下を見てほしい）
https://www.awcc.uec.ac.jp/radio3/ronbun/EM_Wonderland_Chap_11.pdf

送受信：半波長ダイポールアンテナ対向リンクの場合



フリスの伝達公式 $\dfrac{P_r}{P_t} = 1.64 \times 1.64 \times \left(\dfrac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \approx 0.017\left(\dfrac{\lambda}{d}\right)^2$

電磁気学的手法 $\dfrac{P_r}{P_t} = \dfrac{1}{16R^2}\left(\dfrac{\lambda Z_0}{\pi^2 d}\right)^2 \approx 0.017\left(\dfrac{\lambda}{d}\right)^2$

両方式を結ぶ鍵は

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A$$

フリスの伝達公式にも
電磁気学が隠れている

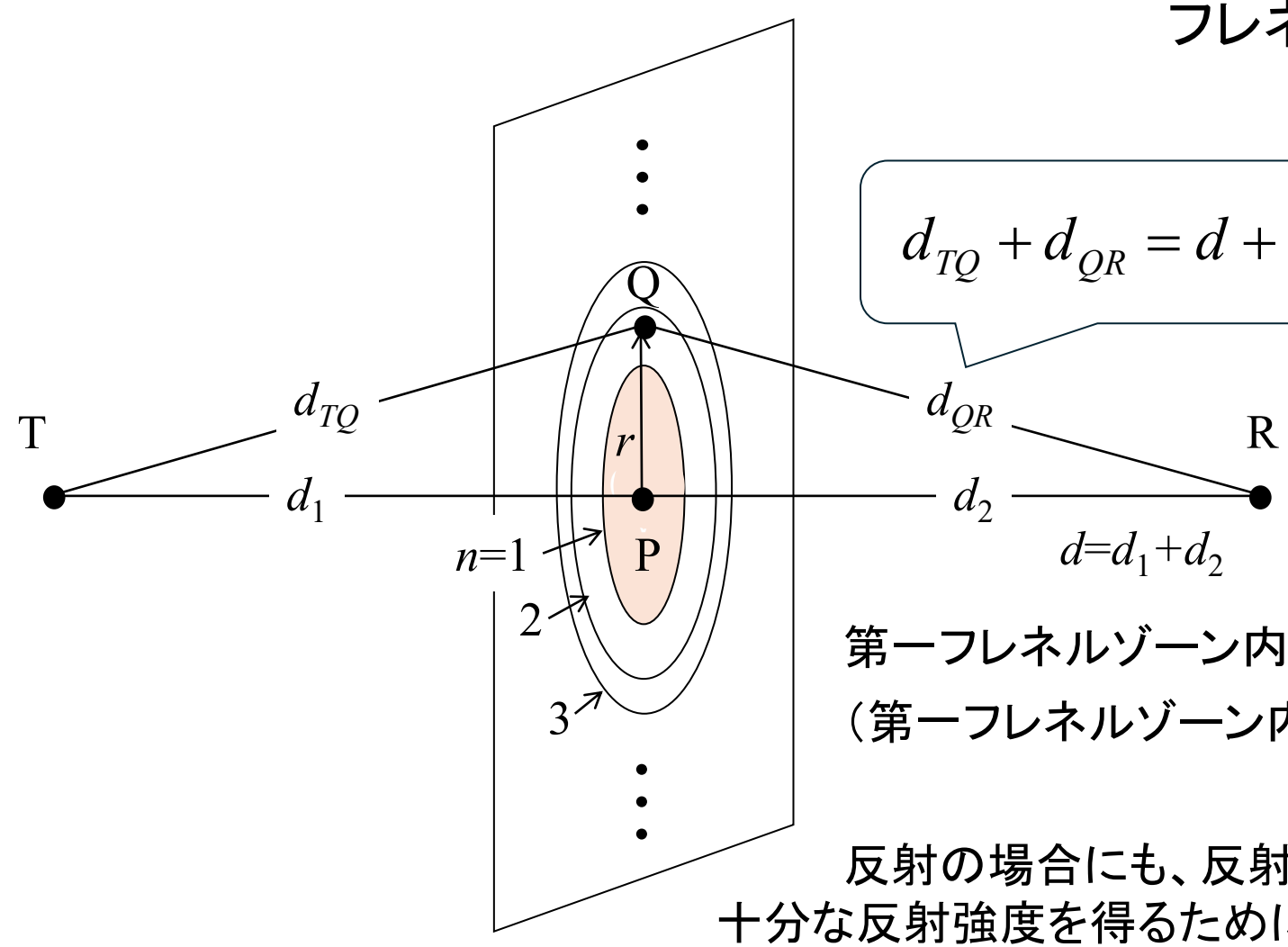
アンテナ利得と
実効面積の関係の中に

フリスの伝達公式は、
アンテナ抵抗 73Ωを
要求している

フリスの伝達公式の
便利さが理解できると思う

光は（電波も）直進する（フェルマーの原理）
→ 最小作用の原理（物理学の基本原理の一つ）

フレネルゾーン（第1、第2．・・・）



$$d_{TQ} + d_{QR} = d + \frac{n\lambda}{2}$$

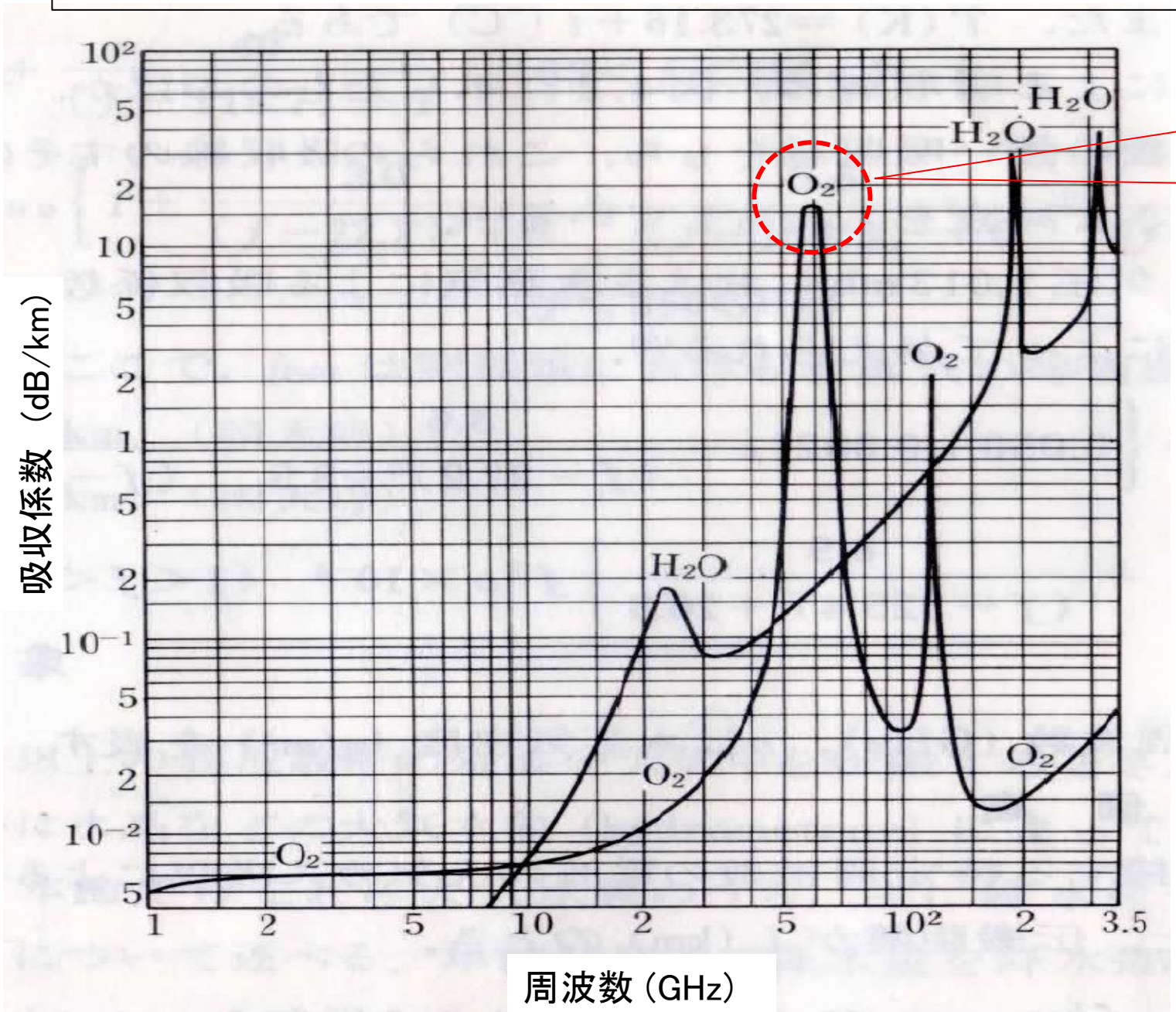
$$r(n) = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d}}$$

距離： d = 1 km
周波数： 1 GHz
中間点での第一フレネル
ゾーン半径： 約 8.7 m

第一フレネルゾーン内のみ通過： 0.5 dB～ 1 dBの損失
（第一フレネルゾーン内に、遮蔽物がかからないように設計）

反射の場合にも、反射面にフレネルゾーンができる
十分な反射強度を得るためには、第一フレネルゾーンサイズの反射面が必要

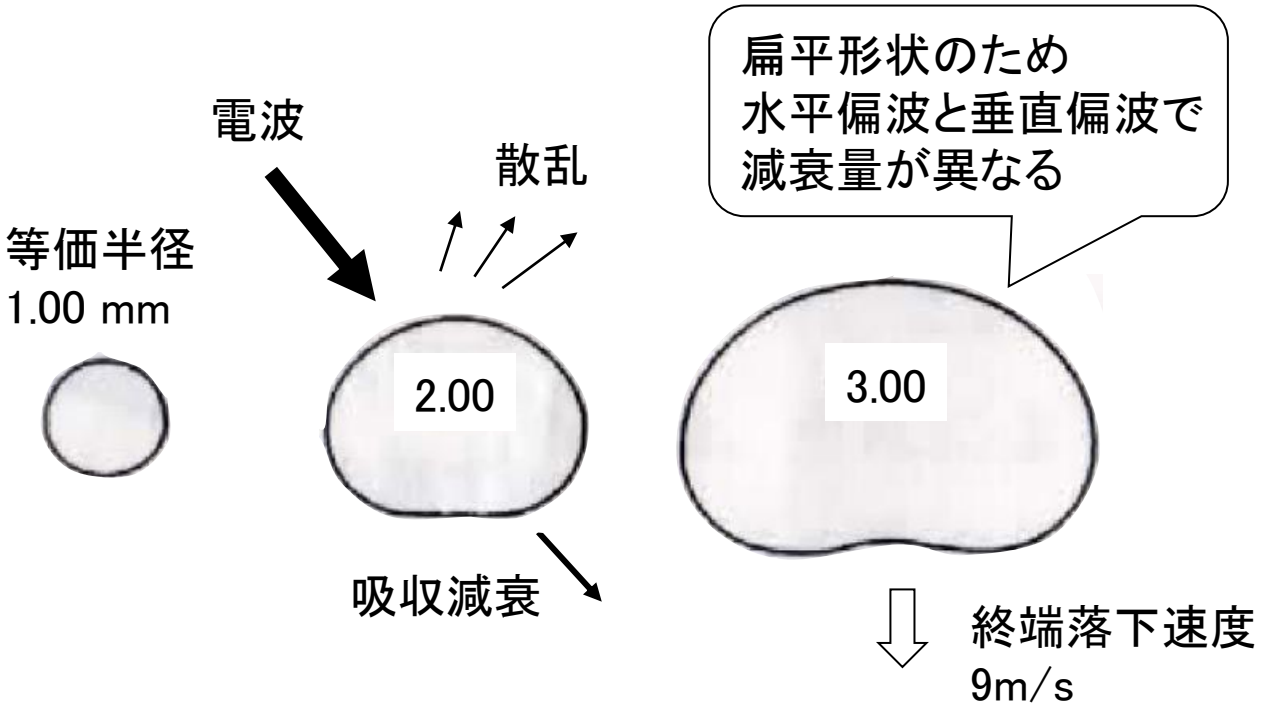
伝搬経路上の媒質による吸収減衰（大気中の酸素と水蒸気）



60GHz帯電波
短距離通信（WLAN, V2Vなど）に、遠くまで飛ばないことを、逆に利用

伝搬経路上の媒質による吸収減衰と散乱（降雨）

降雨の高さ
地上 4～5 km
（0℃層）



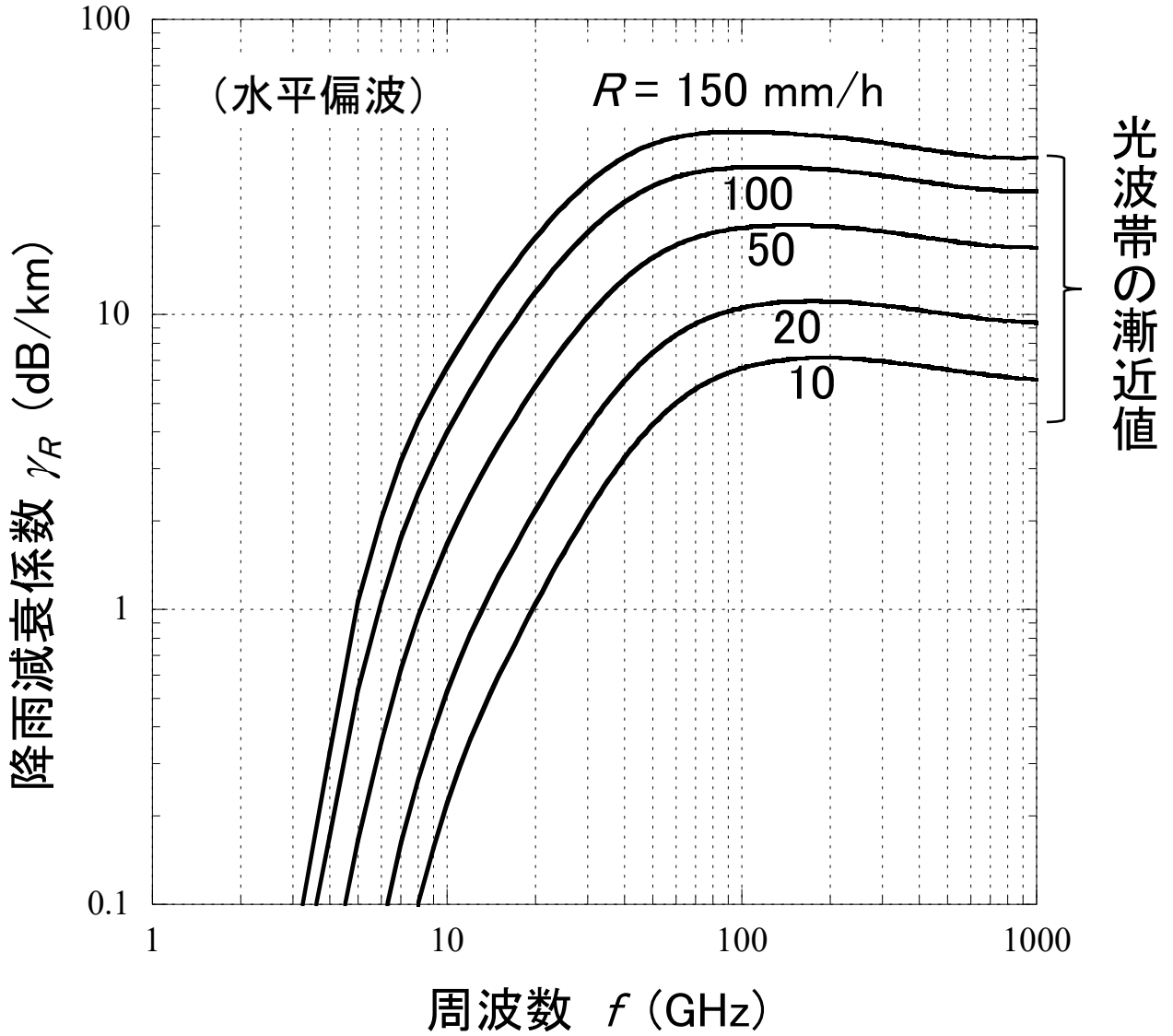
電波の吸収：降雨減衰

電波の散乱：干渉波を生み出す
レーダに反応
（降雨レーダ）

形状がゆがんだ球形
：偏波を乱す
（交差偏波特性劣化）

降雨減衰

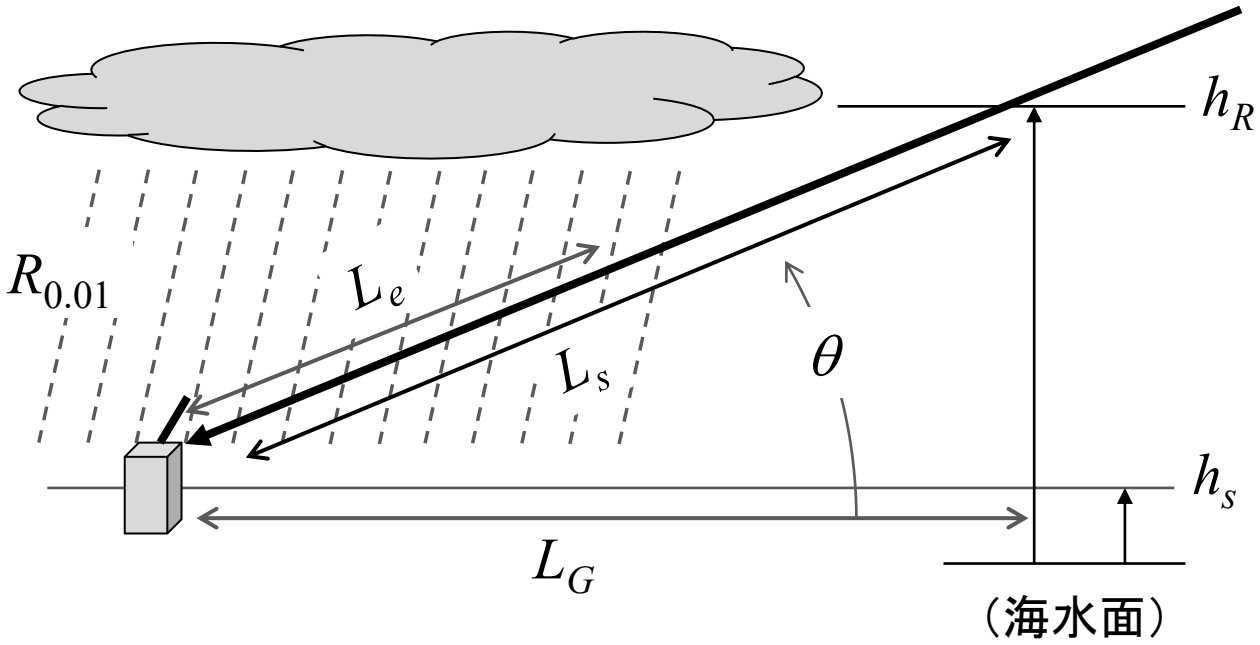
一様な降雨の場合の1km当たりの減衰量（dB値）

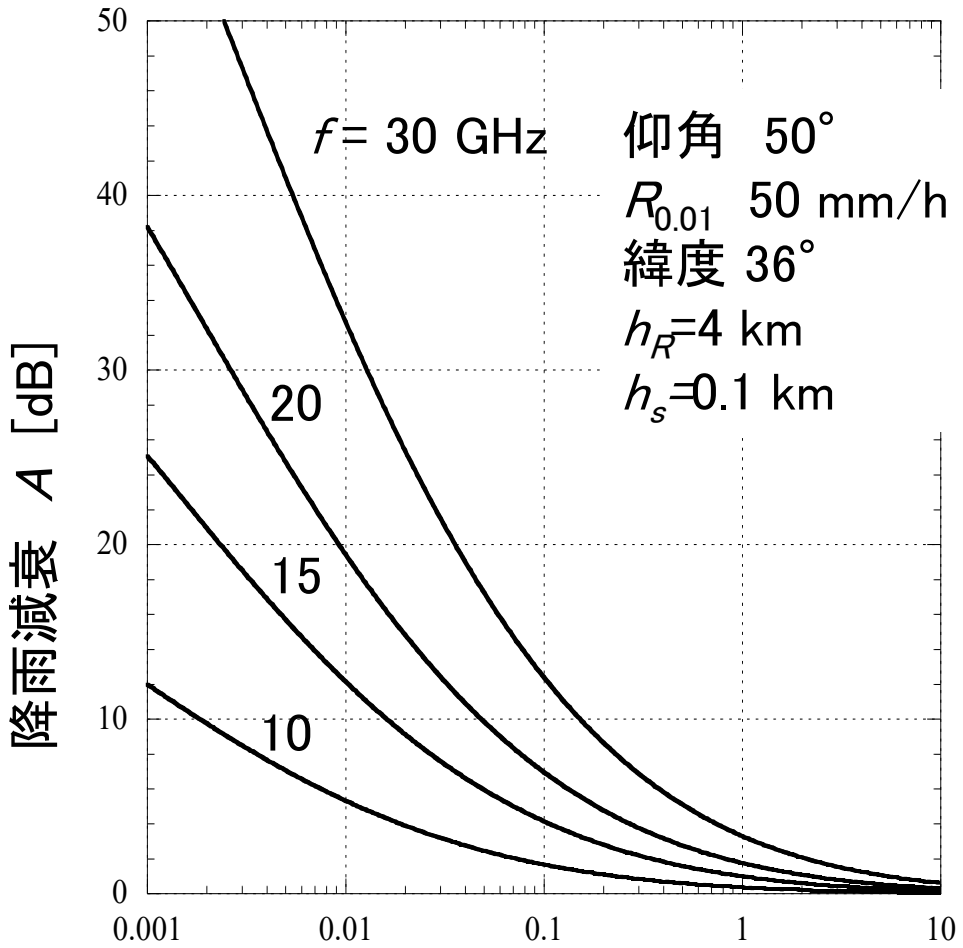


・強い雨ほど減衰が大きい
・高い周波数ほど減衰が大きい
（100GHz付近まで）
・雨中の伝搬距離が長いほど
減衰が大きい
（衛星通信では低仰角運用）

これからの時代（ミリ波時代）の
重要な伝搬問題

衛星回線の降雨減衰





降雨減衰の計算式（ITU-R Rec. P.618）

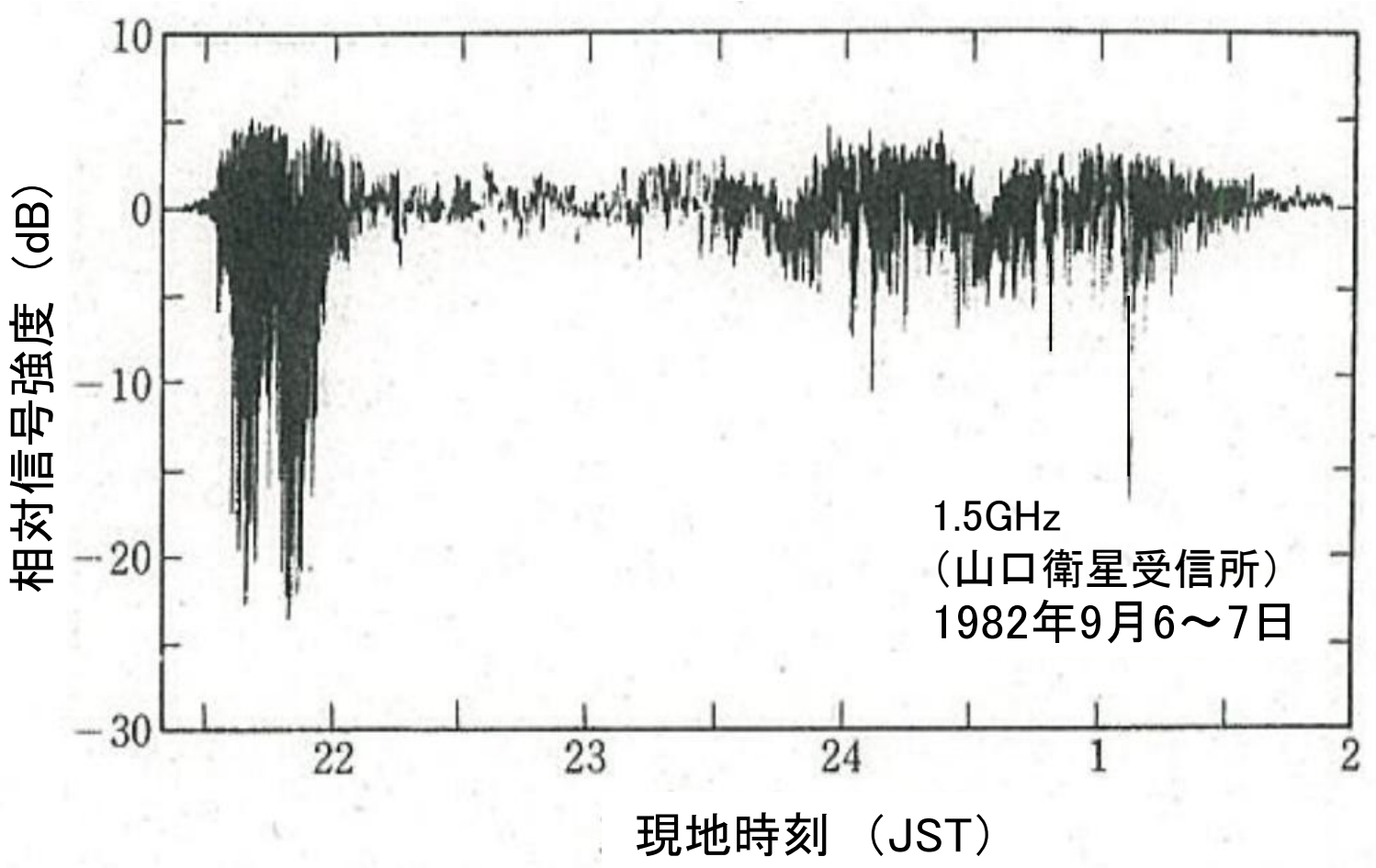
降雨減衰(dB)= 降雨減衰係数(dB/km)

×等価通路長(km)

累積確率（縦軸の値を超える時間確率）p [%]

（衛星回線における降雨減衰対策は、雨域の大きさに対して十分離れた2地点（例えば100km程度）でのダイバーシチ運用。地上系と非地上系で連携して運用される場合には、ダイバーシチの形も多様になる）

電離圏シンチレーション
（滅多に起きないが、起きると大変）



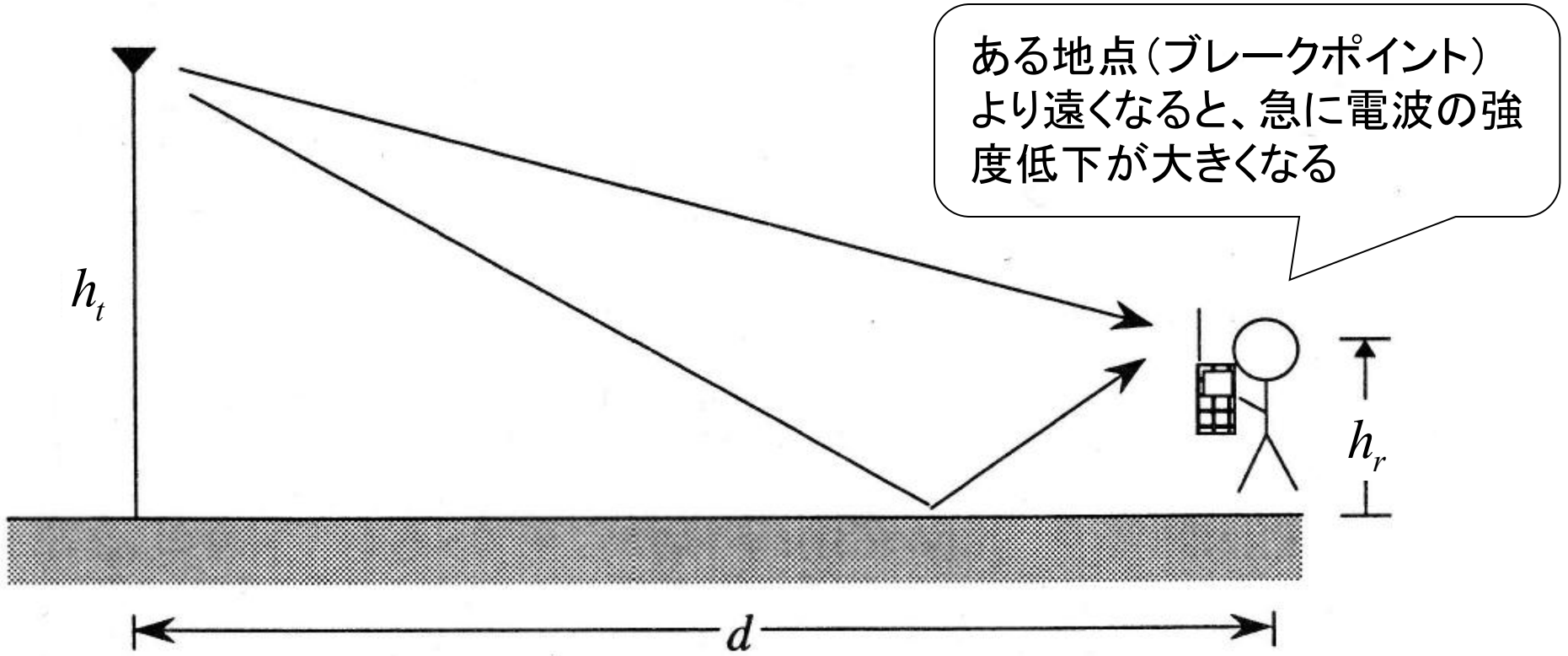
電離圏F層（高度400km付近）での、
プラズマ密度の擾乱 （磁気嵐）

起きやすい時期
・太陽活動が盛んな年
・春分・秋分のころ
・夜8時～12時ころ
（電離圏F層の夕暮れ時）

大きな電離層シンチレーションが起きると
・衛星通信の通信障害
・GPSなどの衛星ナビ異常

以前は予測不能
今は、「宇宙天気予報」である程度予測できる

2波モデル: 単純な伝搬路にブレークポイントが現れる



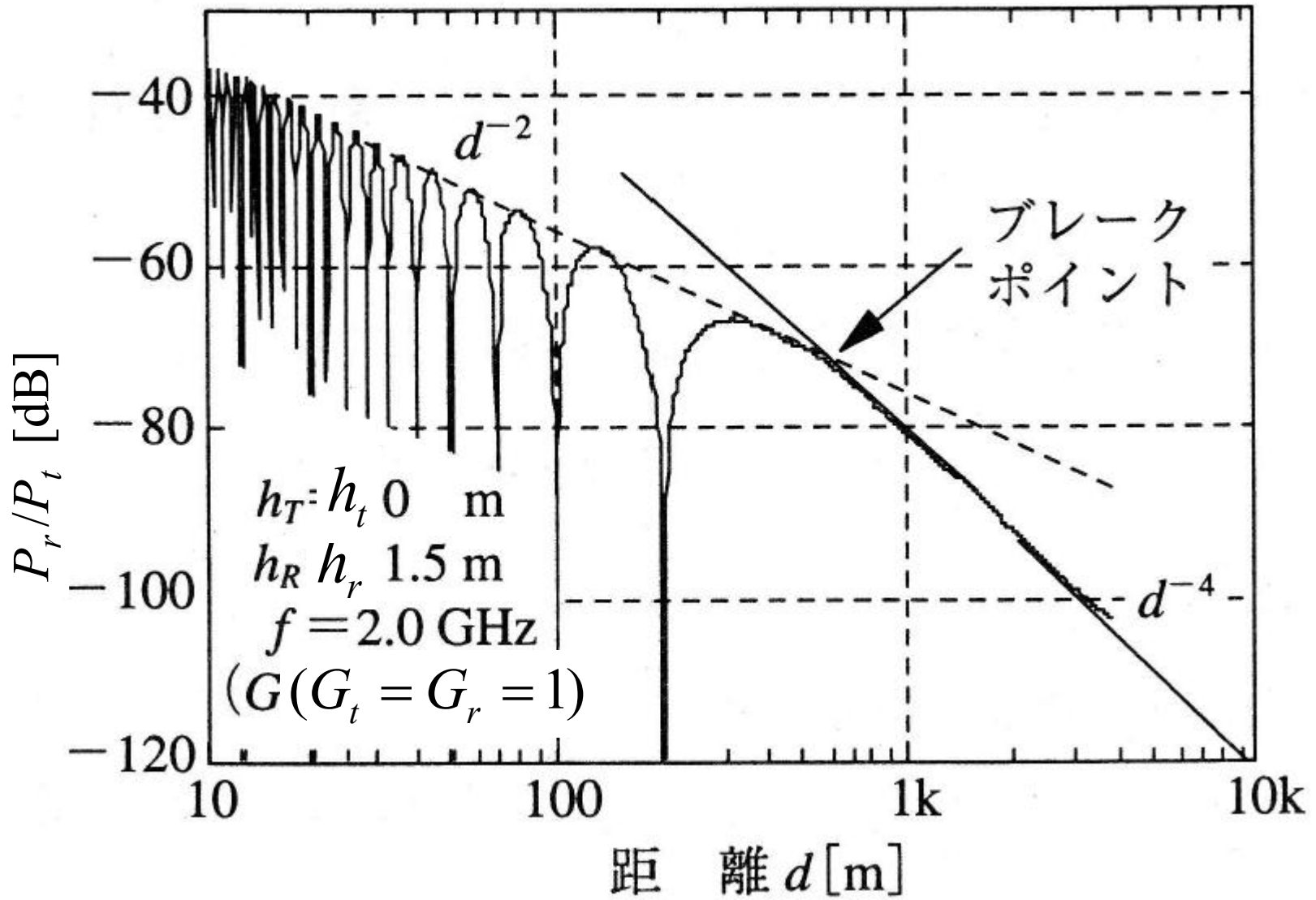
$$A = \left| E_d \{1 + R\exp(-j\Delta\phi\} \right| = 2\left| E_d \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right|$$

$$\Delta\phi \approx \frac{4\pi h_r h_t}{\lambda d}$$

反射係数：−1

$$\Rightarrow \quad \frac{P_r}{P_t} = \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\}^2 G_r G_t$$

2波モデル: 単純な伝搬路にブレークポイントが現れる



反射係数−1で計算
近距離では平均強度が距離の二乗に反比例しつつ周期的な変動をする。
ブレークポイント以遠では2波のレベル差が小さくなり、かつ、位相差も180°に漸近してくるので、強度は距離の4条に反比例して低下する

【マルチパス伝搬モデルと確率分布：構造を見る】

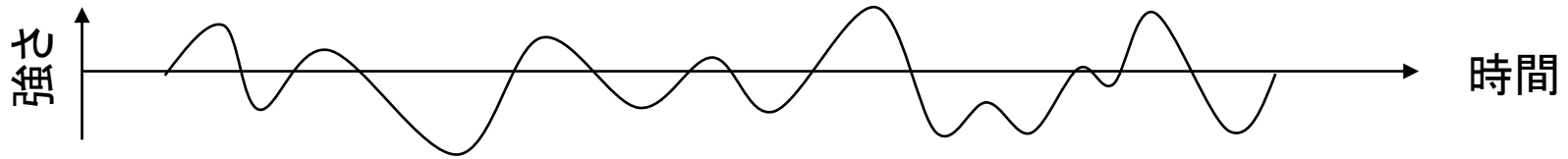
マルチパス伝搬モデルを支える確率過程

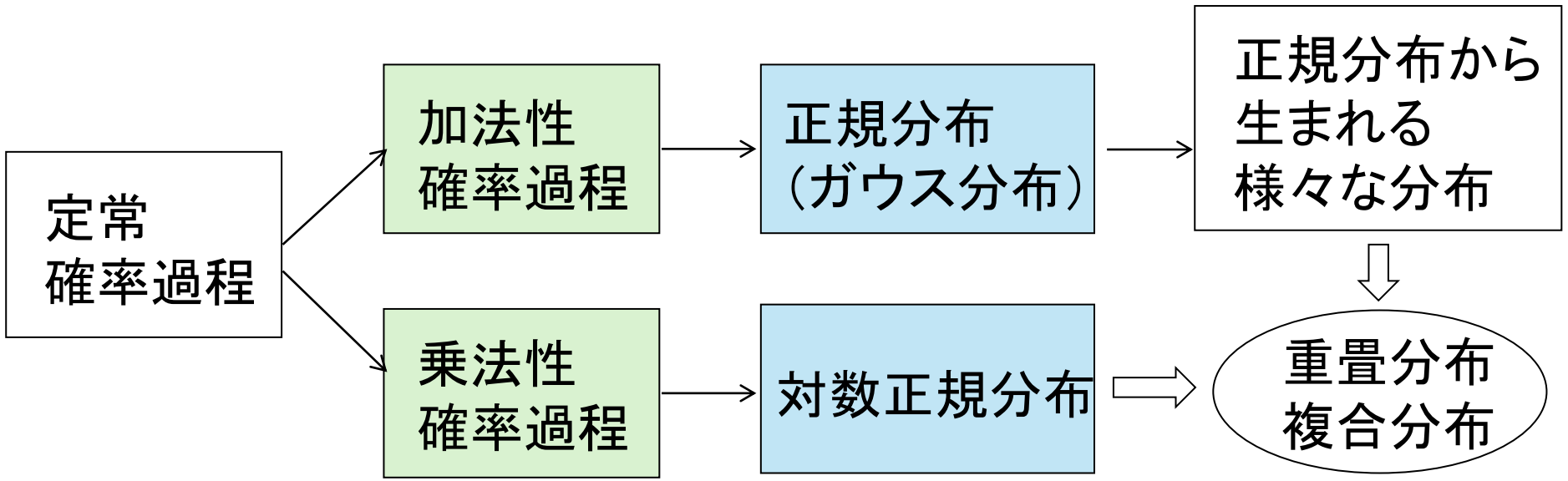
- 加法型確率過程
- 乗法型確率過程
- マルコフ過程

移動伝搬と確率過程

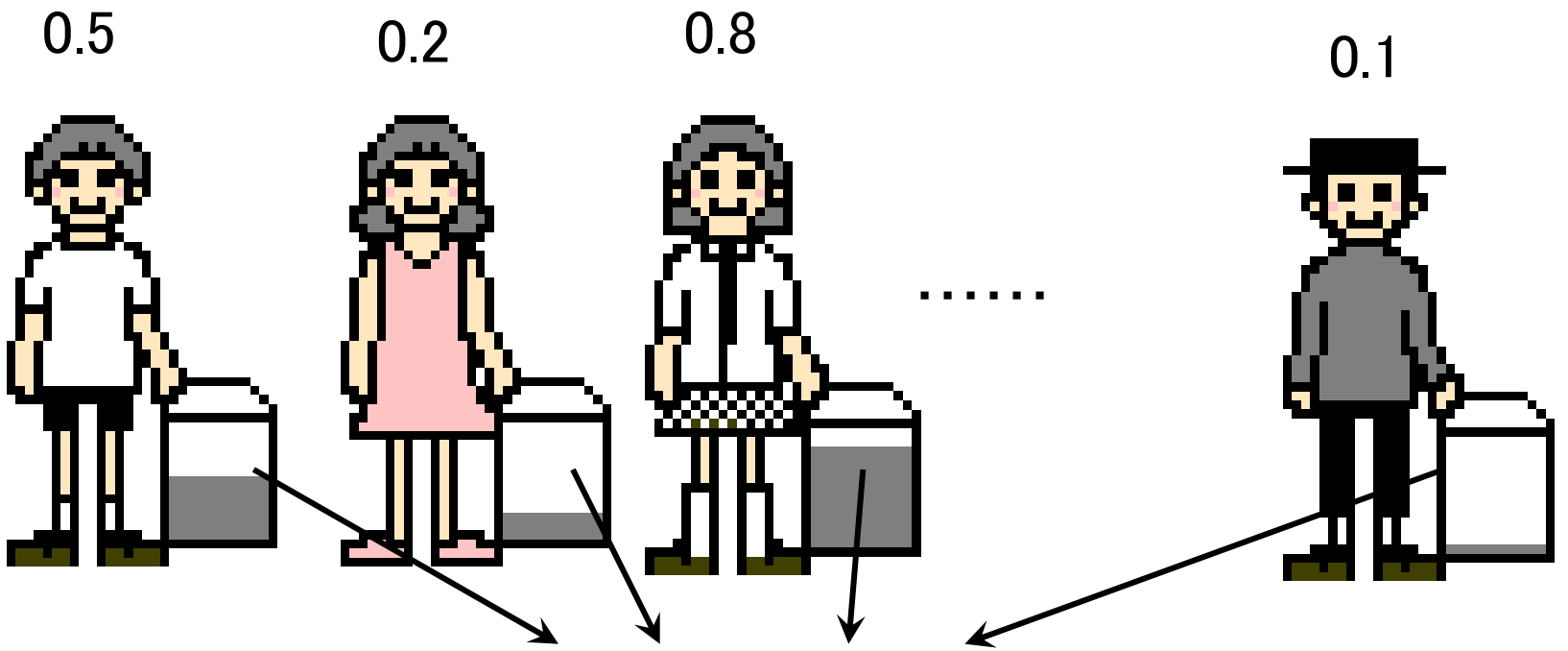
電波伝搬:　電波と自然現象との関わりを扱う分野

不規則媒質中の電波伝搬　→ 確率過程





正規分布(ガウス分布、Normal distribution, Gaussian distribution):
加法型確率過程(Additive Stochastic Process)



中心極限定理
Central limit theorem

正規分布
$N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

中心極限定理（Central Limit Theorem）

$$\hat{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_N) / N$$

x_i: 同一かつ独立な分布（i.i.d.）

（もう少し条件を緩めることも可能）

Nが十分大きいとき、正規分布になる

個々の作用が足し算される現象の物理量は正規分布に
漸近する　⇒　正規分布は確率分布の基本中の基本分布

この証明は、どの確率の教科書にも書かれていて、さほど難しくない。
しかし、その証明を理解するためには、確率分布の和の分布を求める
特性関数（あるいは積率母関数）の知識が必要

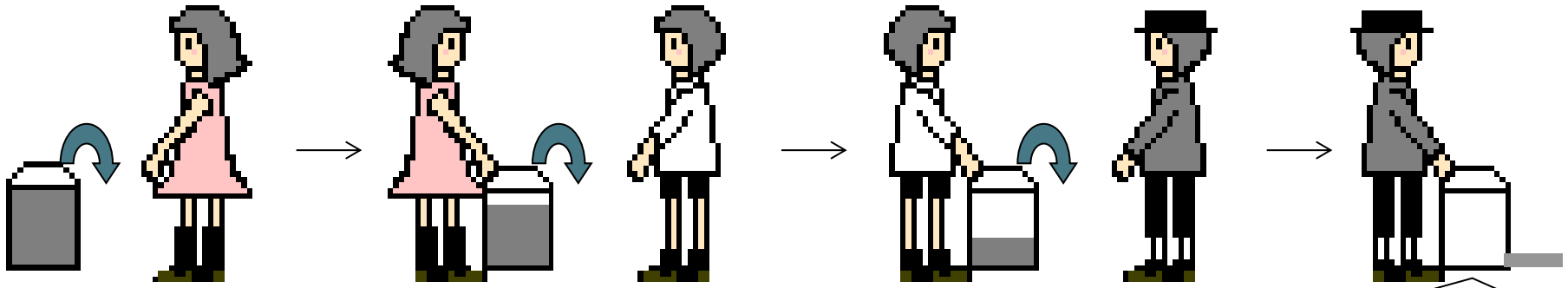
対数正規分布（log-normal distribution）
乗法型確率過程（Multiplicative Stochastic Process）

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_N$$

正規分布

$$\log x = \log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \cdots + \log x_N$$

1.0 × 0.8 × 0.5 × 0.7



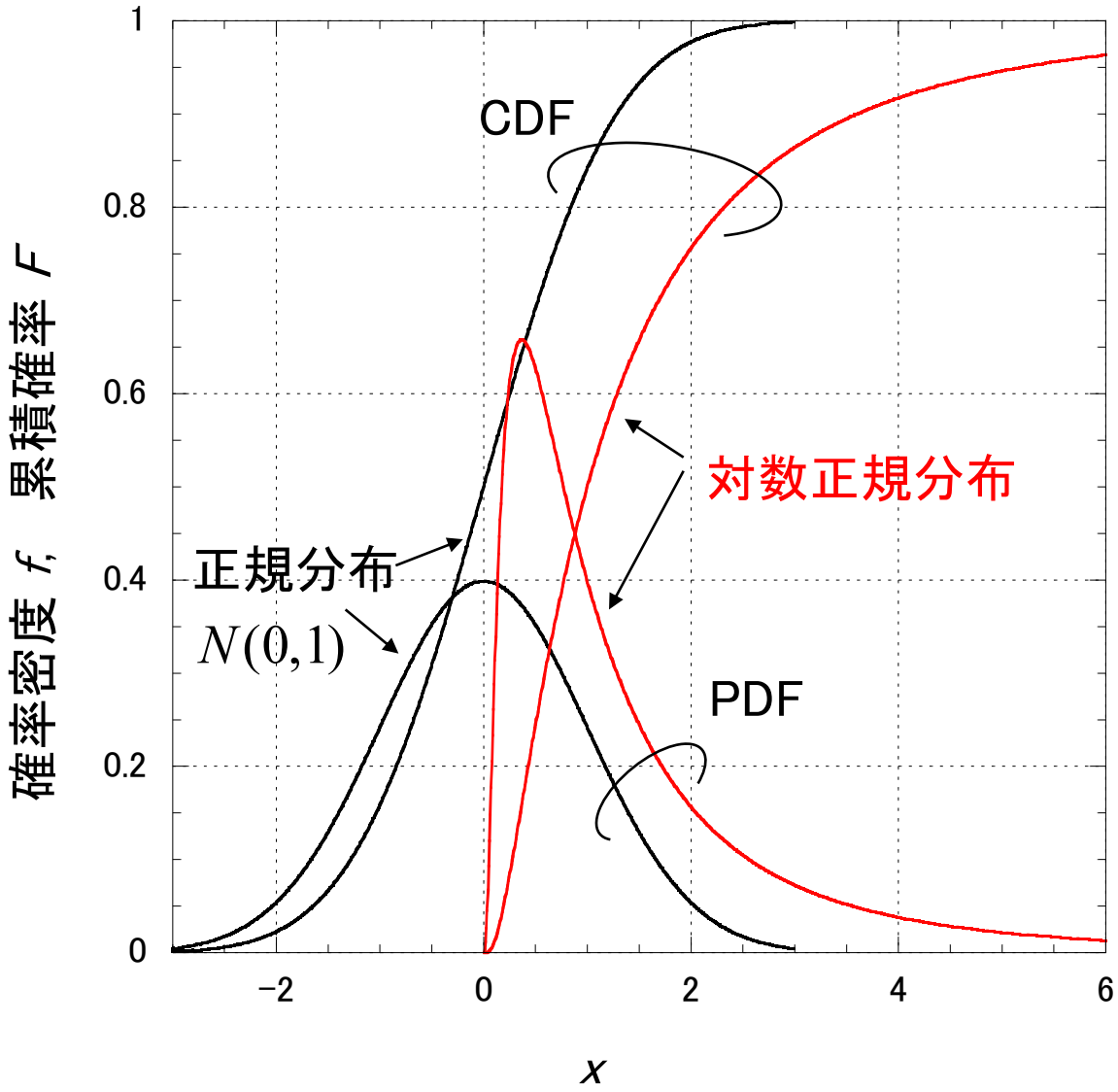
対数で表された量（例えばdB値）
が正規分布するときの
真数値xの分布（誤差を倍半分で見る世界）

対数正規分布

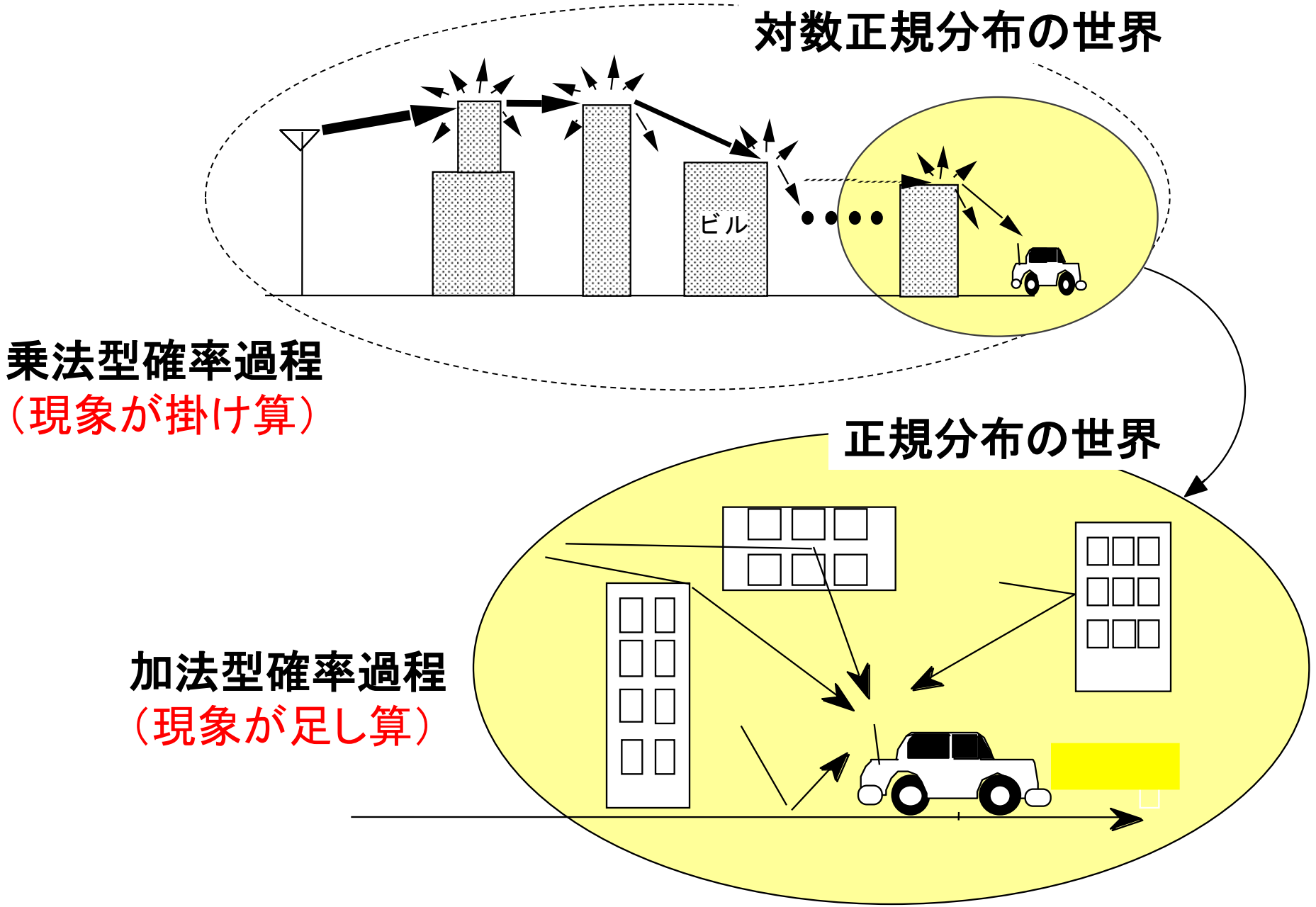
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{ -\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

（m, σ はlog x の平均値と標準偏差）

正規分布と対数正規分布の
確率密度関数(PDF)と累積分布関数(CDF)



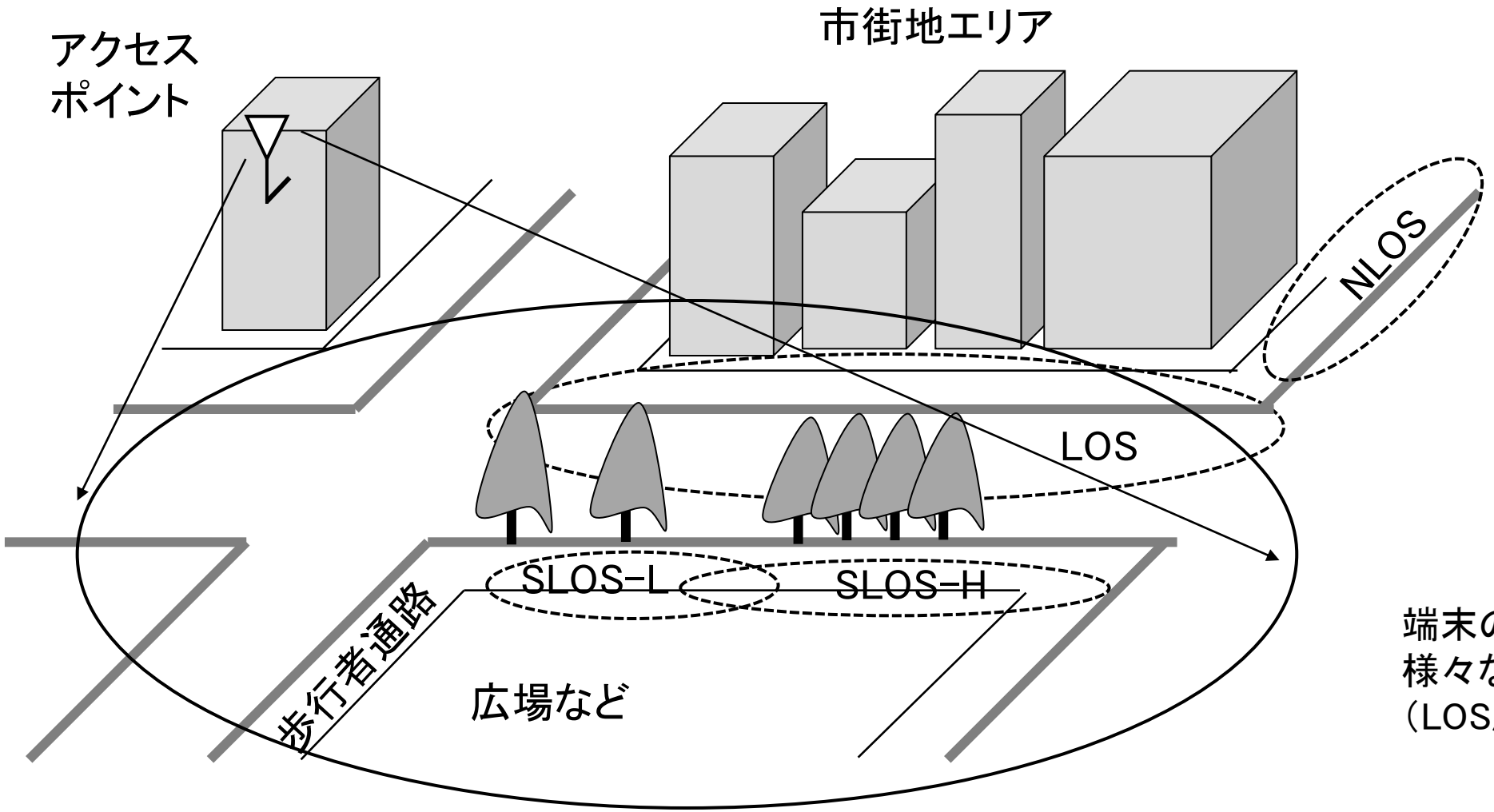
移動伝搬の確率過程 （乗法型確率過程×加法型確率過程）



マルコフ過程

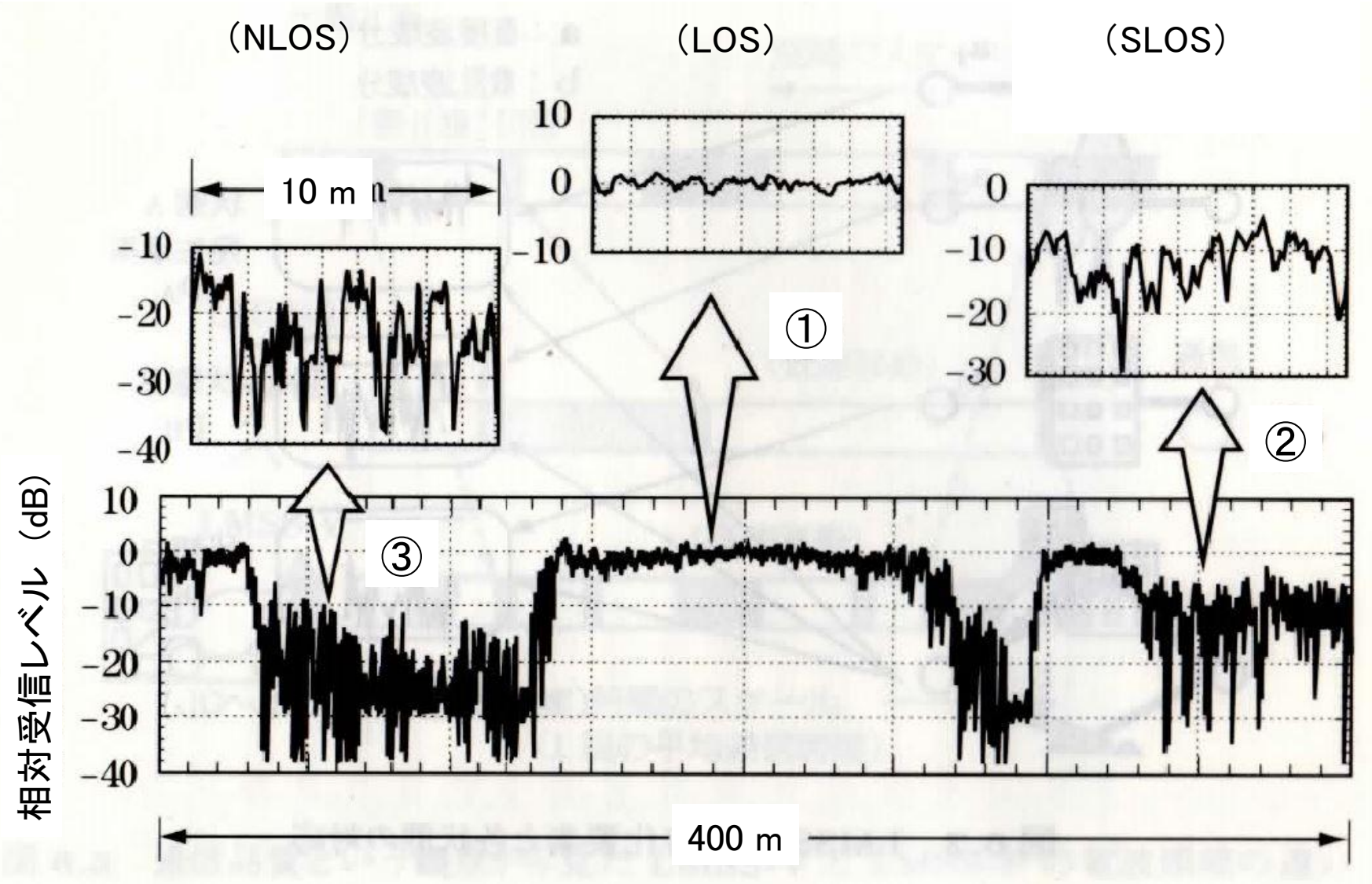
伝搬状態自体が、時間と共に移り変わってゆく
（複数のタイプの伝搬環境が交互に現れる）

伝搬環境の多様性



端末の場所によって、
様々な電波環境になる
（LOS/SLOS/NLOS）

市街地における衛星電波の移動受信の例



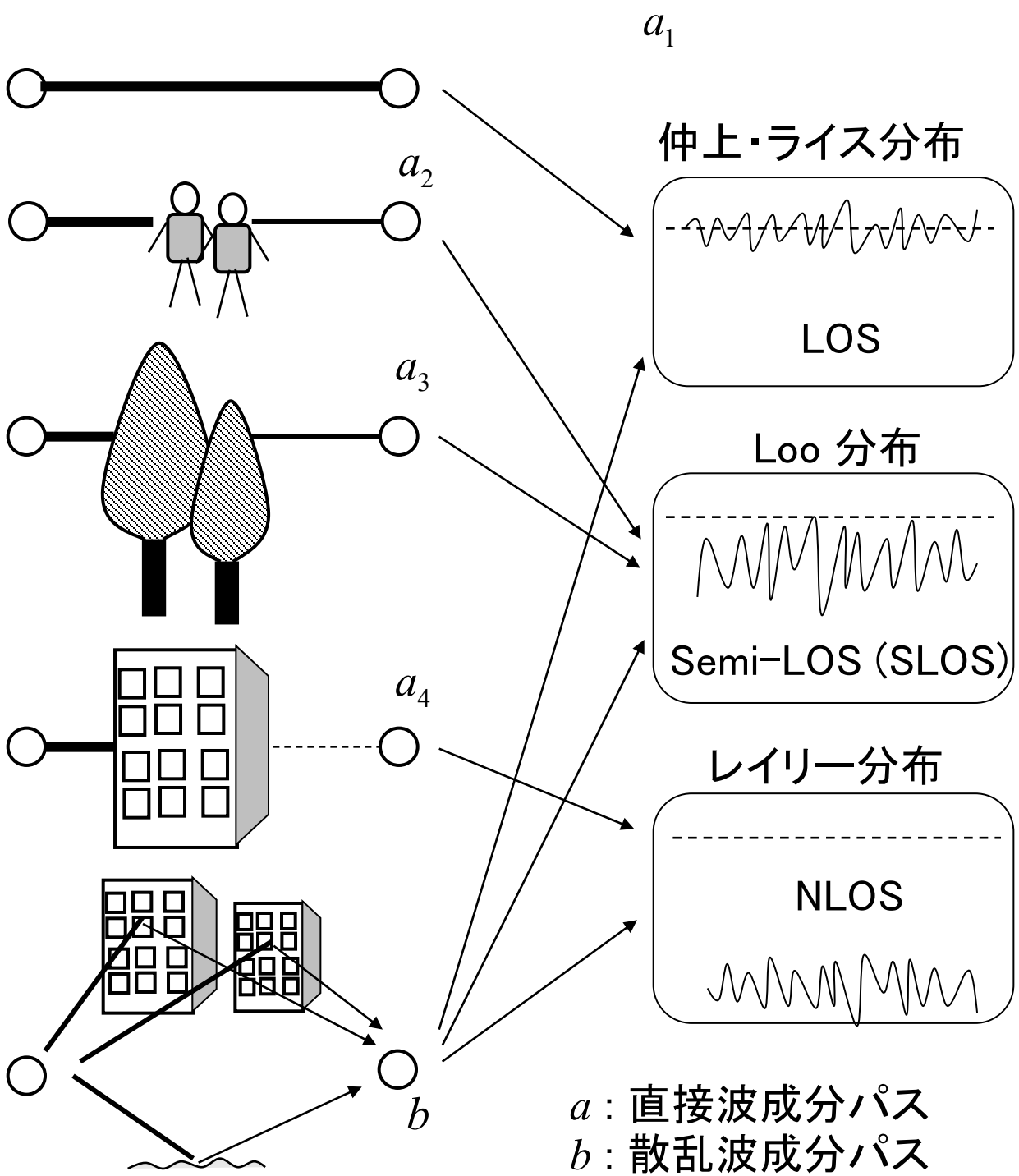
場所：新宿（市街地）

衛星：インマルサット

太平洋衛星

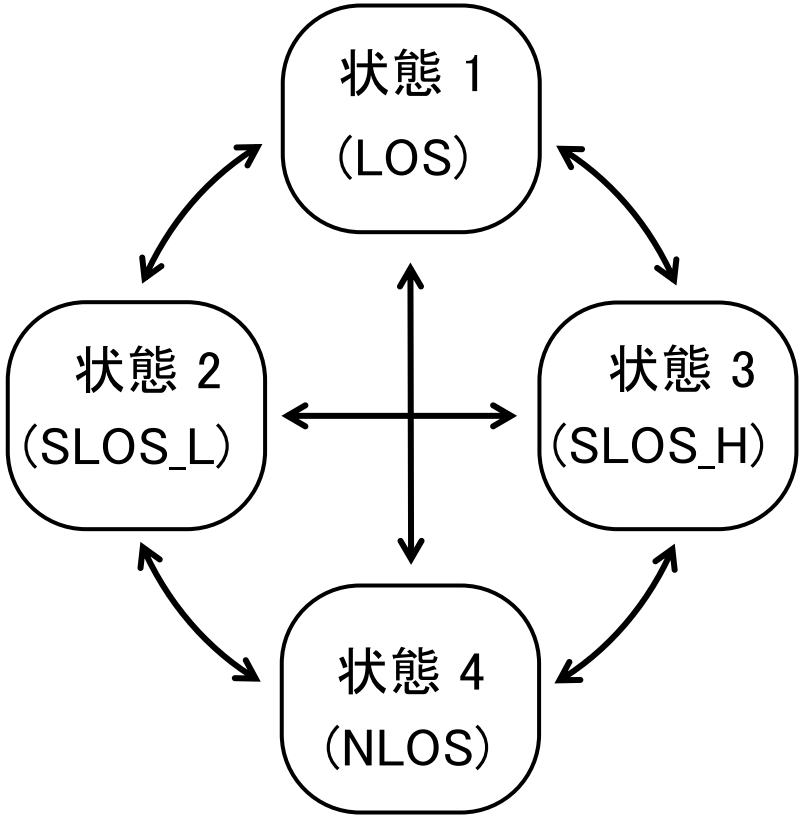
周波数： 1.5GHz

仰角； 32°



a：直接波成分パス
b：散乱波成分パス

多状態を渡り歩く伝搬モデル（マルコフモデル）



状態の発生確率
状態の平均持続時間
を遷移確率行列に反映させる

基本的な伝搬モデル

レイリー分布

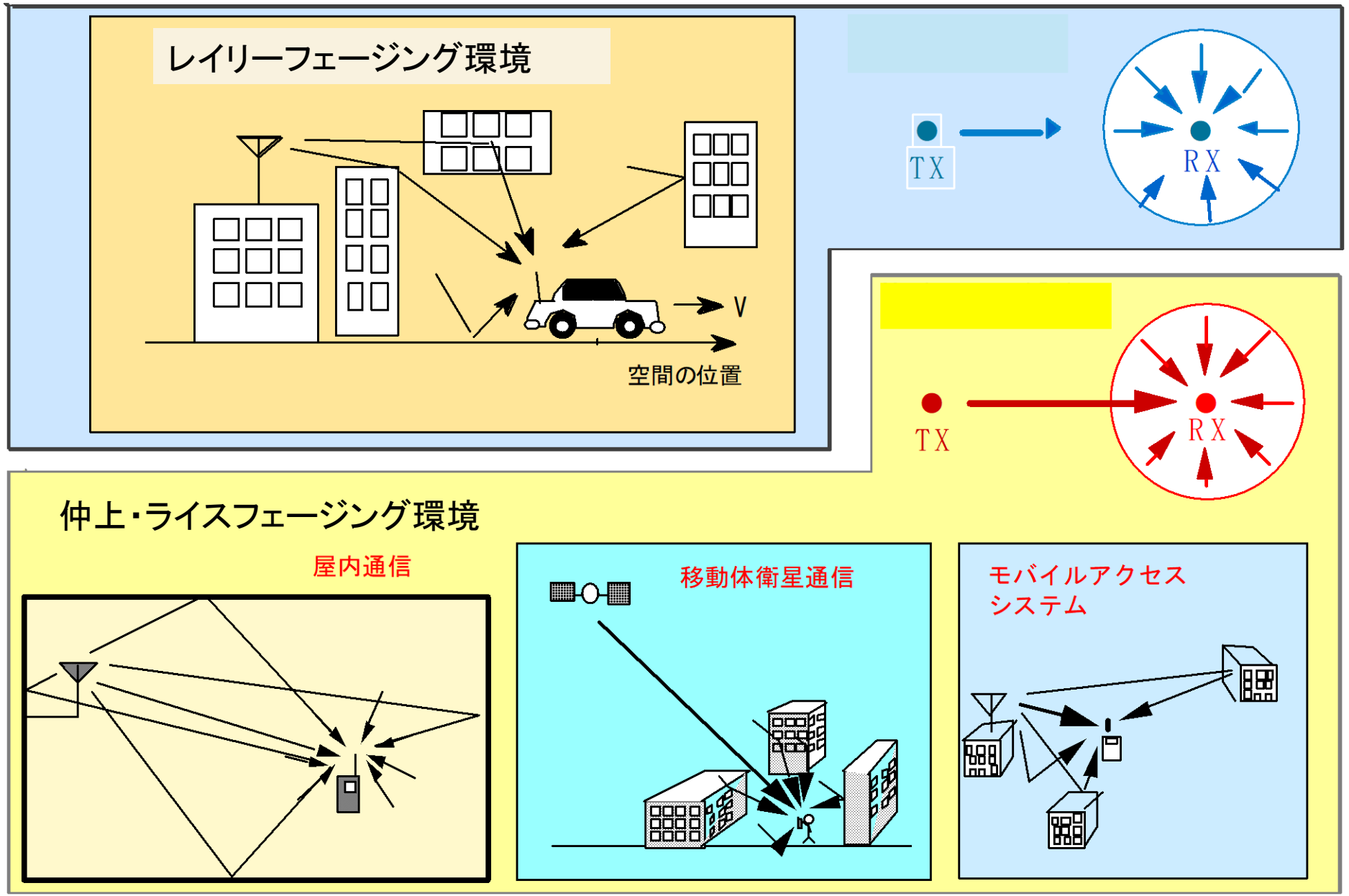
仲上–ライス分布

仲上m分布

多機能な伝搬モデル

マルチクラスタモデル

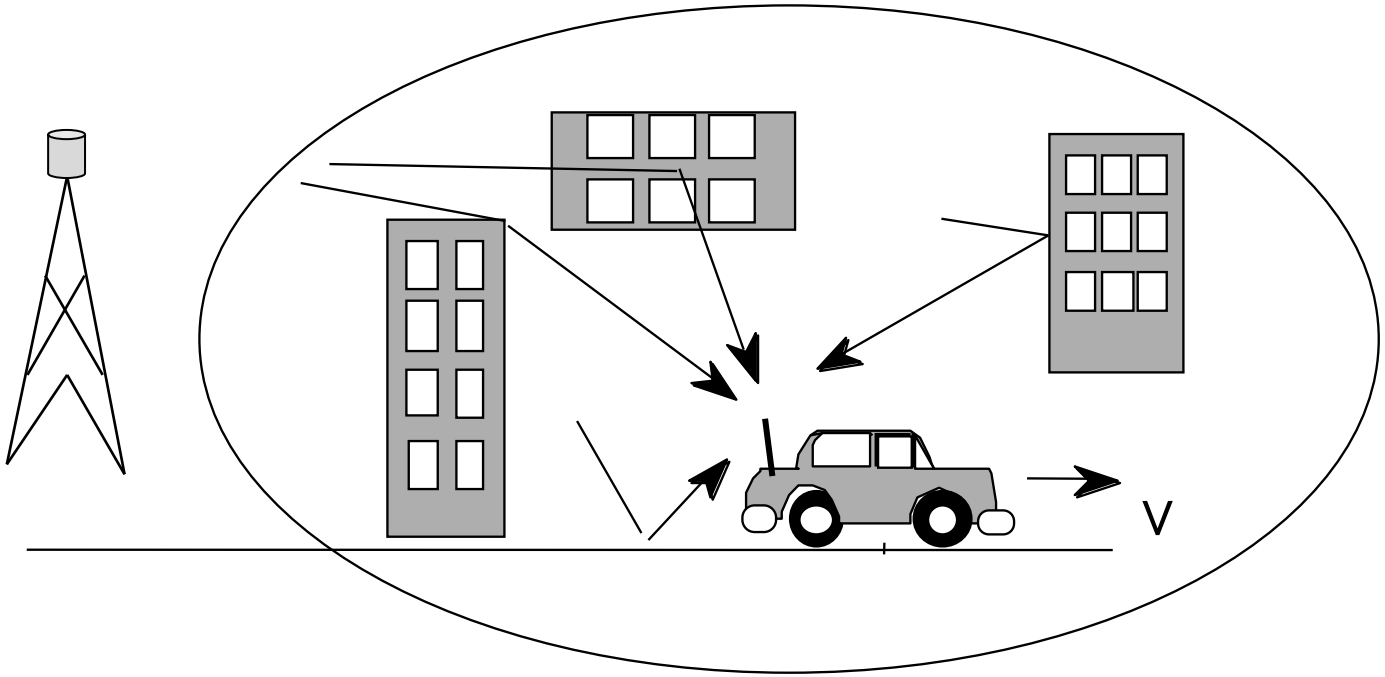
レイリーフェージング環境と仲上・ライスフェージング環境



レイリー分布

見通し外（NLOS）のフェージング環境（レイリーフェージング環境）を表す

移動通信の基本分布



加法型確率過程

見通し外通信（NLOS）

同じような強さの波がたくさん集まる

レイリー分布 （無相関2次元正規分布の振幅の分布）

電波環境では： 同レベルの多数の波が合成された信号の包絡線レベルの分布 （NLOS伝搬環境）

$$a = r_1 e^{j\phi_1} + r_2 e^{j\phi_2} + \cdots + r_N e^{j\phi_N}$$

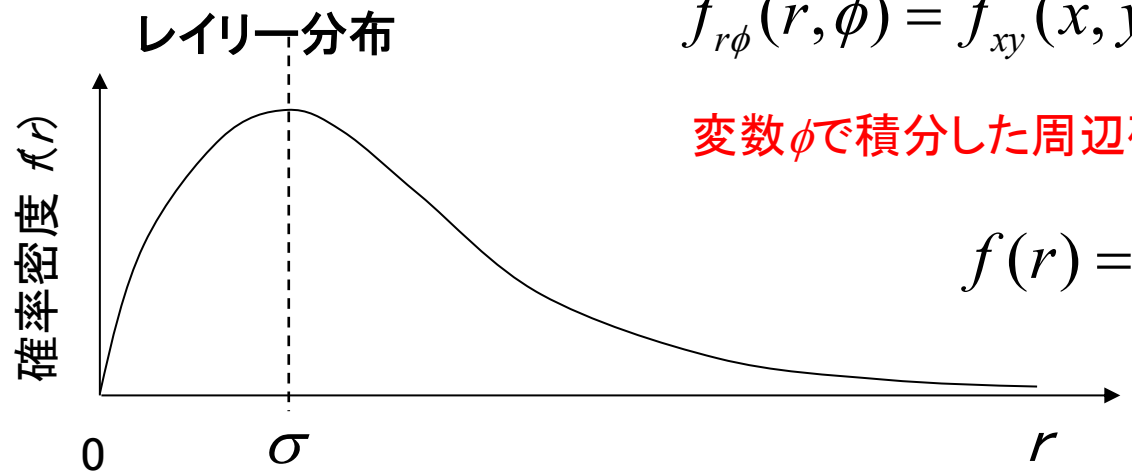
$$= \underbrace{r_1 \cos\phi_1 + r_2 \cos\phi_2 + \cdots + r_N \cos\phi_N}_{x = r\cos\phi \to N\left(0,\sigma^2\right)} + j\underbrace{\left(r_1 \sin\phi_1 + r_2 \sin\phi_2 + \cdots + r_N \sin\phi_N\right)}_{y = r\sin\phi \to N\left(0,\sigma^2\right)}$$

$$r = \left|x + jy\right| \left(= \sqrt{x^2 + y^2}\right) \qquad f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_{r\phi}(r,\phi) = f_{xy}(x,y)\left|J\right| = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

変数ϕで積分した周辺確率分布

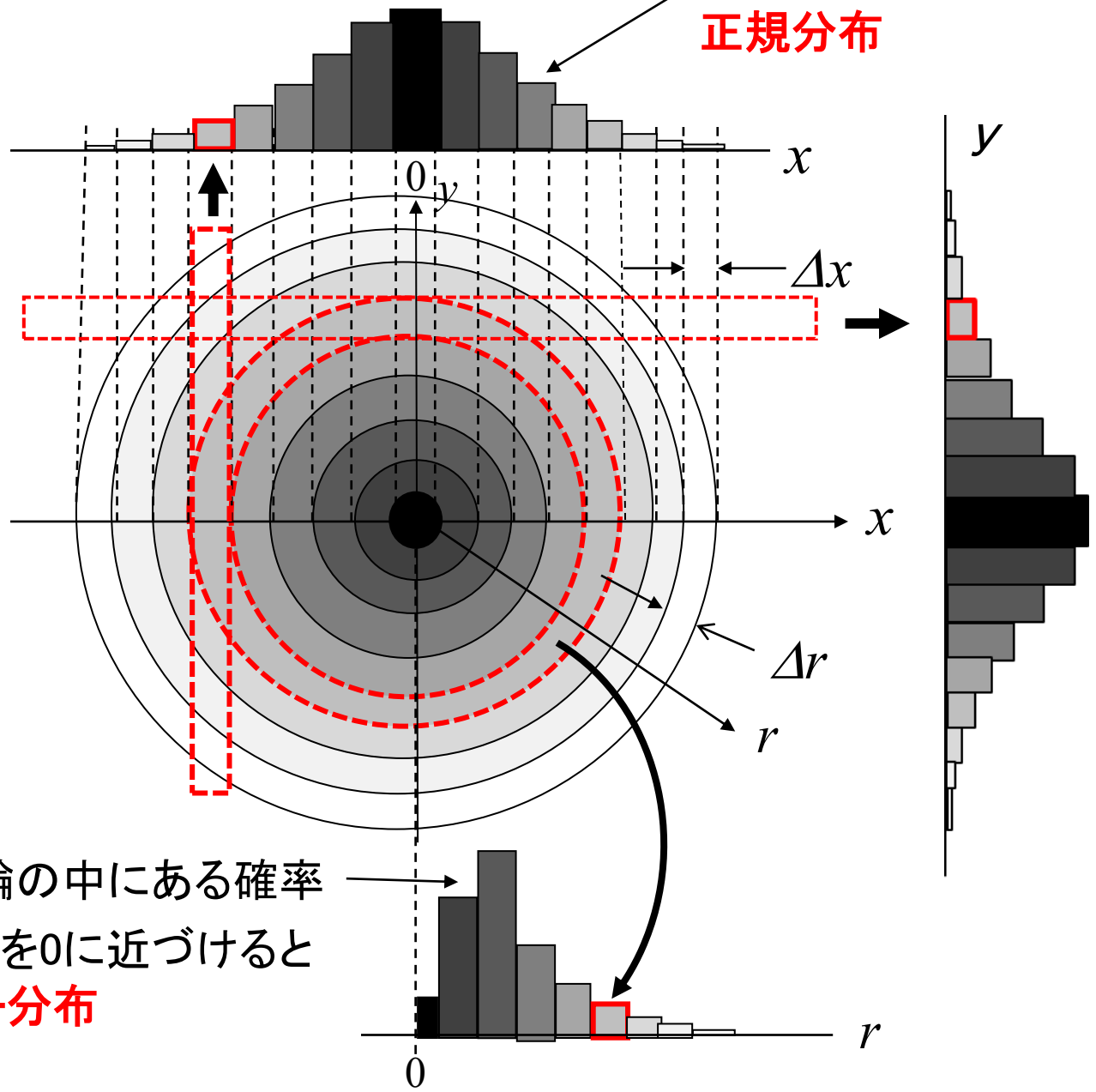
$$f(r) = \int_0^{2\pi} f(r,\phi)d\phi = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$



レイリー分布の意味

$$r(t)=|x(t)+jy(t)|$$

変数 x , y :
平均値 0 、分散 σ^2 の
独立な正規分布



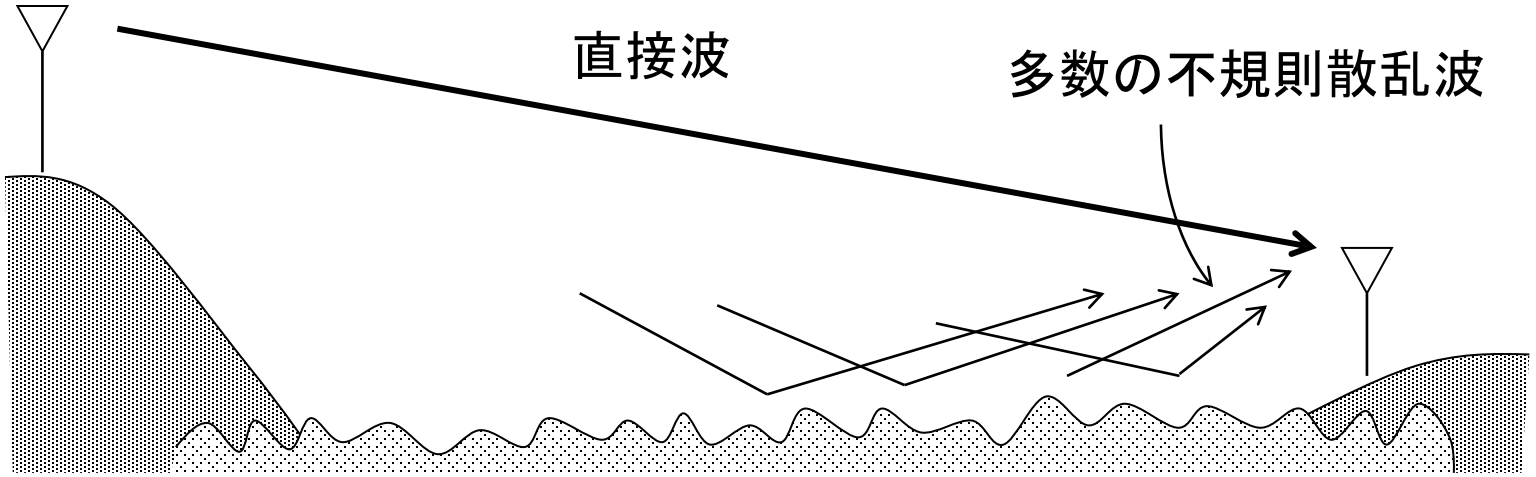
たとえ話

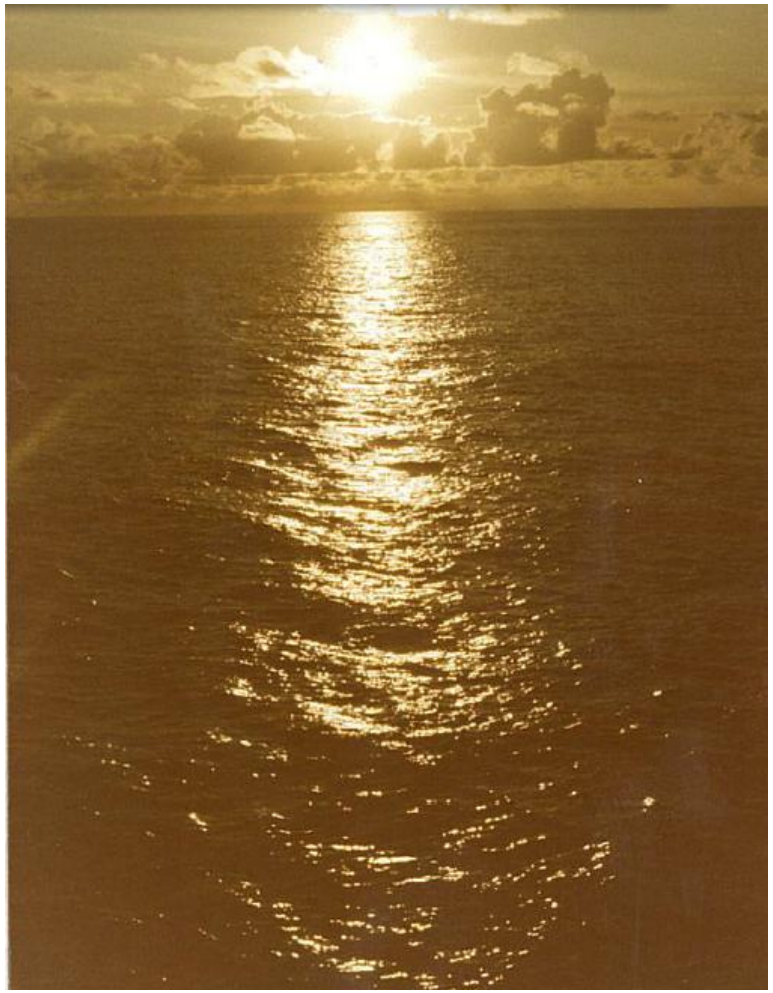
Δr 幅の円環が
それぞれの国
- 人口密度は中心にある国ほど高い
- 中心から少し離れた国の方が、面積が広いので、総人口は多い
- 中心から大きく離れてゆくと面積が増える以上に人口密度の減りが大きくなり、総人口は減少に転じる
- レイリー分布は、人口密度ではなく、総人口の方を言う

仲上・ライス分布

仲上稔 と S. O. Rice　が独立に編み出した確率分布

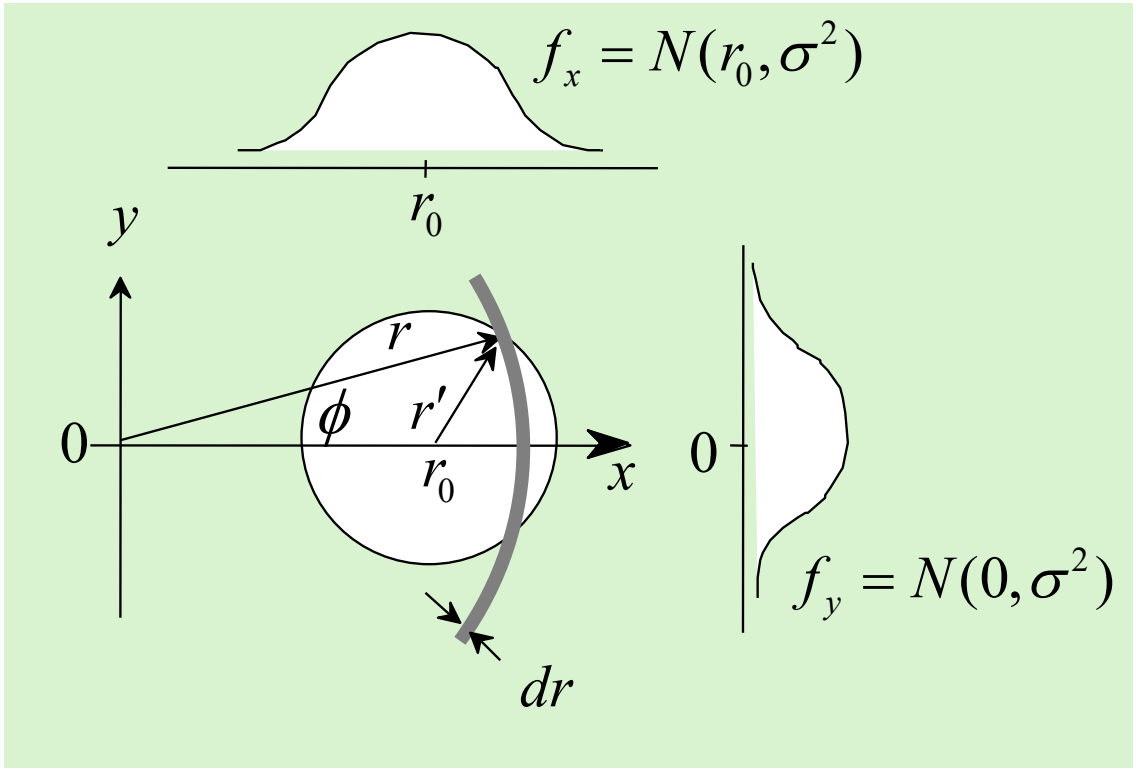
見通し内（LOS）フェージング環境を表すモデルに使われる





仲上・ライス分布 （定常成分と不規則成分の合成信号振幅の確率分布）

変数 x が$N(r_0,\sigma^2)$, y が$N(0,\sigma^2)$であるときの$x+jy$ の振幅 r の分布



$$r = |x + jy| \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$f_{r\phi}(r,\phi) = f_x(x) f_y(y) |J|$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0 r\cos\phi + r^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2} \right) \exp\left(\frac{r_0 r\cos\phi}{\sigma^2} \right)$$

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r,\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2} \right)$$

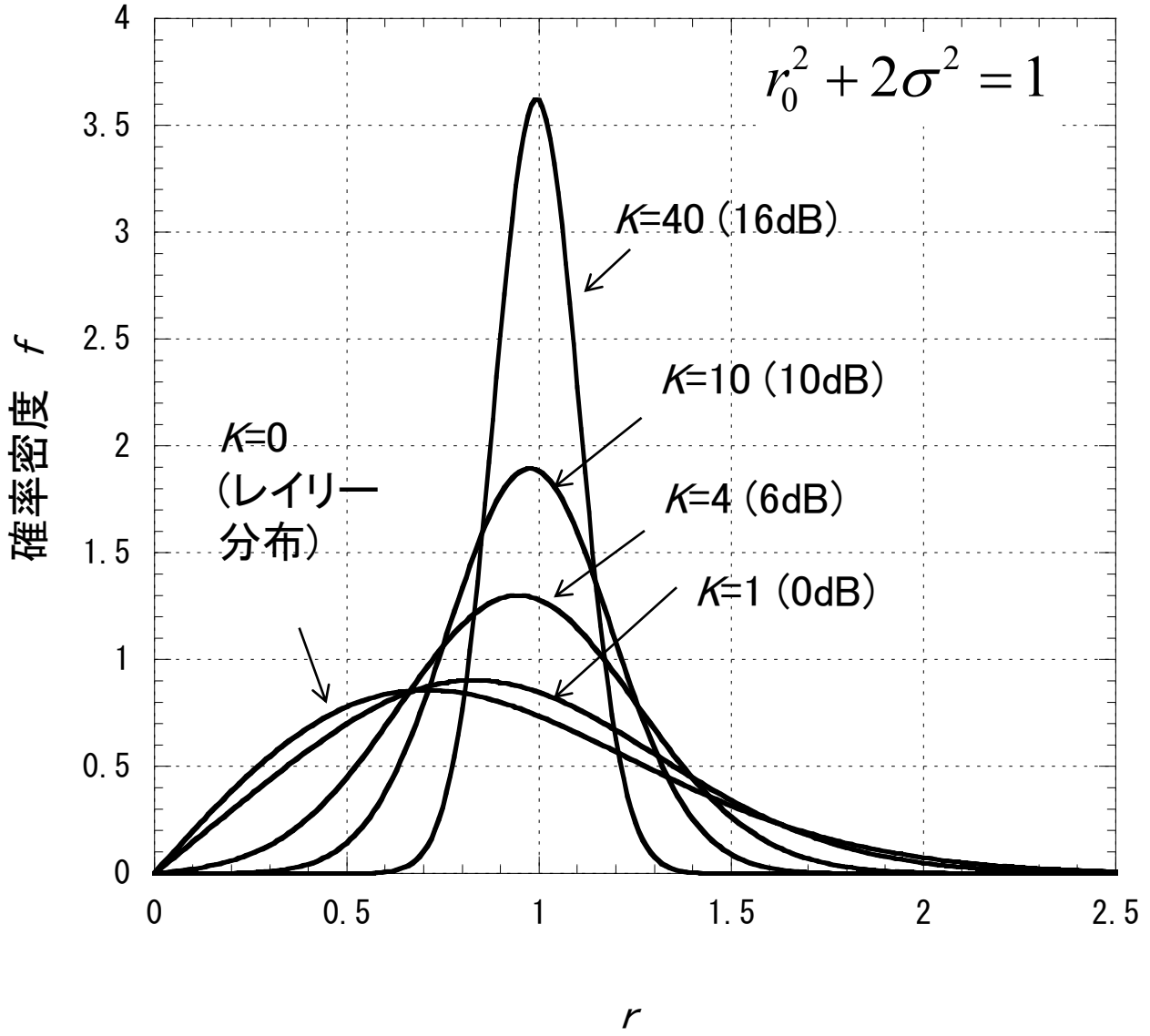
r : 仲上・ライス分布

r' : レイリー分布

（r_0=0で両者は一致）

（変形ベッセル関数 I_0 の積分表示公式より）

仲上・ライス分布の計算例



ライスファクタ: K
（定常成分と
不規則成分の電力比）

$$K \equiv \frac{r_0^2}{2\sigma^2}$$

見通し内（LOS）伝搬環境を表す

仲上稔氏が編み出した三つの確率分布
（わが国発、電波伝搬の記念碑的分布）

n 分布（電気通信学会雑誌；1940年） → 仲上–ライス分布
（S. O. Rice, BSTJ, 1945）

q 分布（電気通信学会雑誌；1942年） → 仲上–ホイト分布
（R. S. Hoyt, BSTJ, 1947）

m 分布（電気通信学会雑誌；1943年） → 仲上m分布、仲上分布

・n分布とq分布は純粋に理論的な考察から得られた分布
・m分布は短波のフェージングデータ解析から発見的に見出された分布
　しかし、m分布には理論的な意味でも重要な分布
・三つの分布には、近似の意味で、深い関係がある

仲上氏が研究開発に従事したころの時代背景

1930年代後半～1940年代
（昭和の激動期：太平洋戦争を挟んだその前後）

無線通信（国際通信）は短波通信の時代
（HF: 3～30MHz, 電離層伝搬）

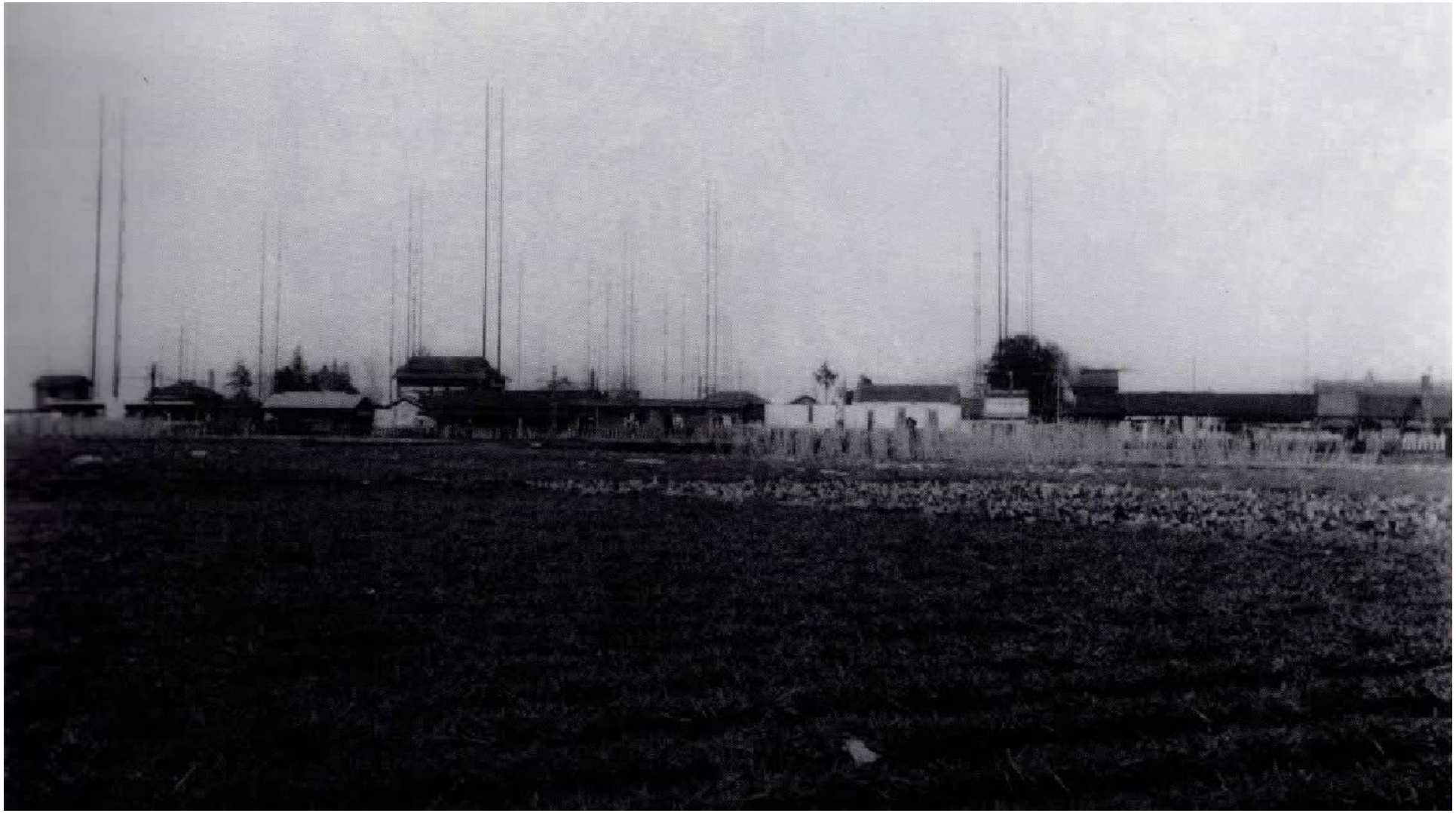
所属： 国際電気通信株式会社（当時の国策会社）

勤務地： 福岡受信所（現埼玉県ふじみ野市）内にある研究棟

伝搬データ： 記録紙やブラウン管の時代、データ処理も手作業
（現代は、ディジタル機器による自動収録・自動処理の時代）

この詳細は、技術レポート TR-YK-076「仲上三分布への歴史探訪」にまとめている。
PDFの入手は、唐沢研究室ホームページより

仲上氏の実験室があった福岡受信所周辺の風景



昭和２８年ころの福岡受信所の無線塔（空中線支持柱）群
（東武東上線上福岡駅から北側の広大なエリアに短波のアンテナが張り巡らされていた）

（福岡受信所の歴史；上福岡市教育委員会より）

仲上m分布（または、m分布、仲上分布）

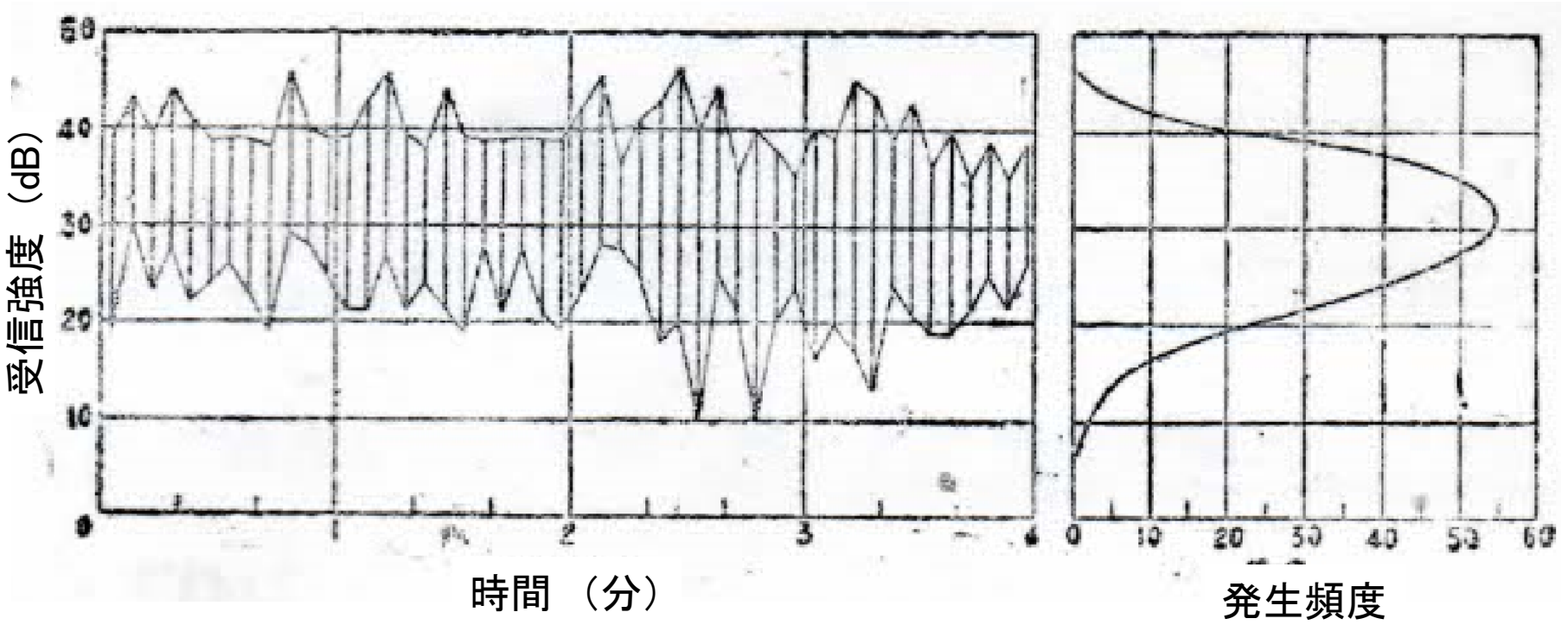
移動通信のフェージング環境を表すのによく用いられる分布
世界の中で Nakagami distribution と言えば、この分布

謎に包まれた分布

観測から生まれた経験式　→　基本的な理論分布の一つ

仲上m分布の詳細解説は以下のサイトに
https://www.awcc.uec.ac.jp/radio3/ronbun/Probability_Distributions_Chap_6.pdf

短波フェージングデータと頻度分布特性（下記文献の図2．3より）



今のように自動記録したデータをパソコンが解析してくれる時代と違って、仲上が働いていた時代（1930～1940年代）には、測定データもブラウン管を見て写真を撮ったり自記記録計の紙データであったりで、解析もすべて手作業である。短波のフェージングの周期は数秒程度以下であるので、観測単位時間を3～5秒とし、その間における電界強度の変動の範囲（最大値と最小値）をもってその間の電界強度の変動を代表させ、これの数分間の連続記録（左）から頻度分布（右）を得ていたようである。

仲上稔, *短波の特性及び合成受信の研究*, 修教社, 1947.

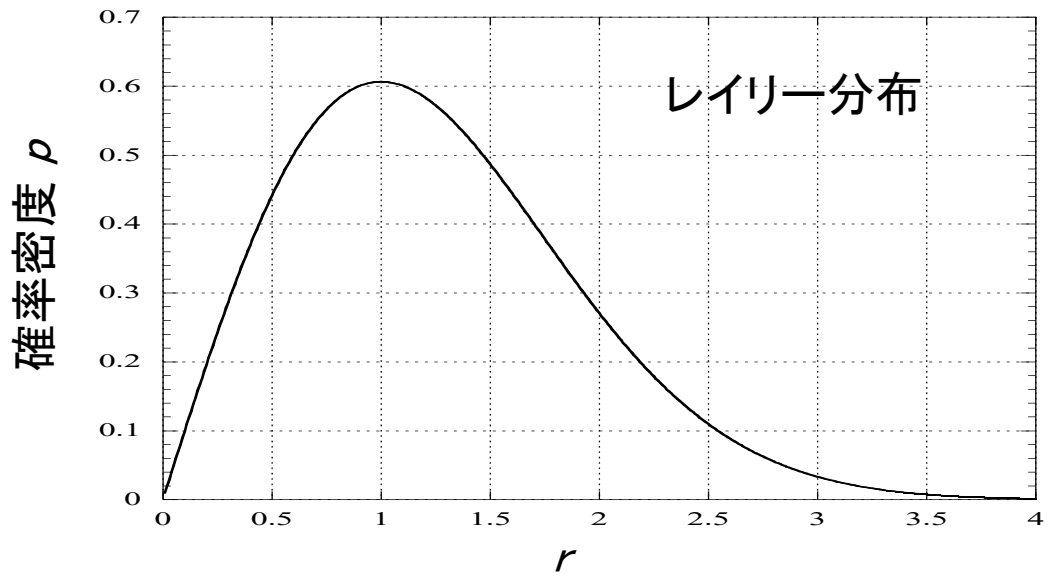
相対頻度グラフ（レイリー分布の確率密度関数を直線で表す特殊方眼紙）

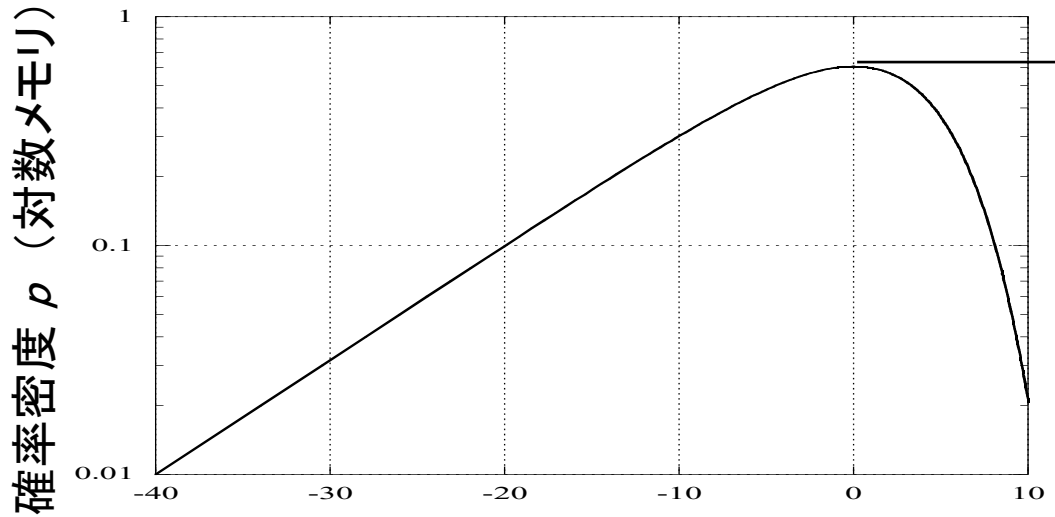
$$x = 1 + \frac{2}{M} - \exp\left(2\chi / M\right)$$

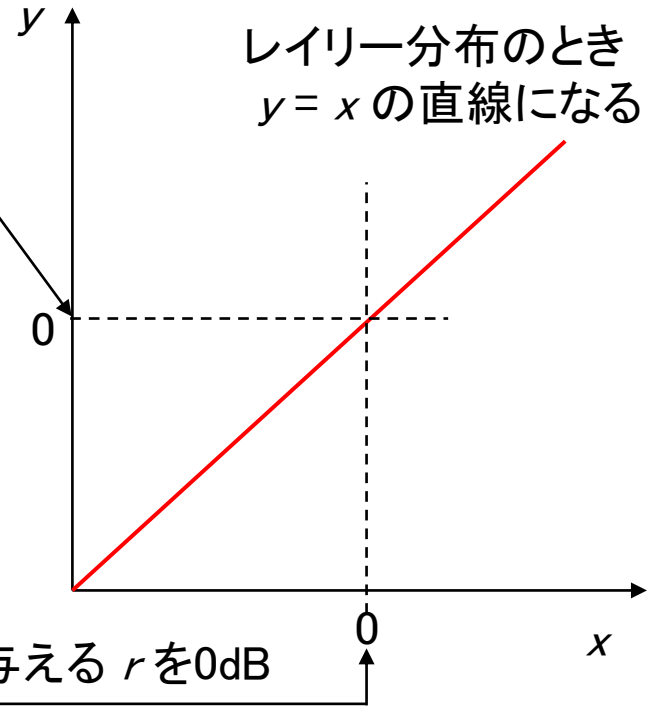
$$\left(M = 20\log_{10} e\right)$$

（c<0のとき。c≧0では−xに）

$$y = \begin{cases} \log_e p' \ \ (\text{for } \chi \le 0) \\ -\log_e p' \ \ (\text{for } \chi > 0) \end{cases}$$



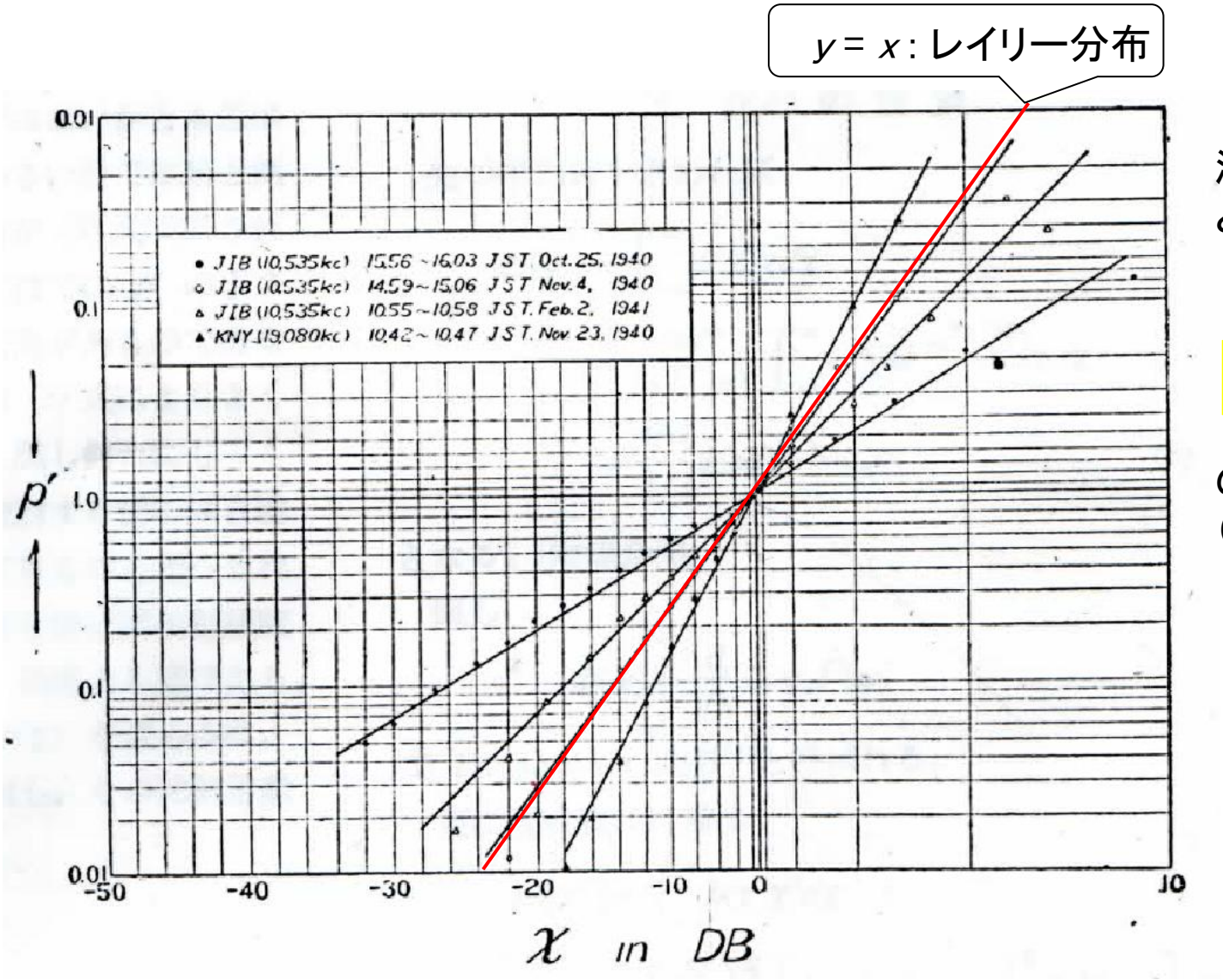




レイリー分布のとき
$y = x$ の直線になる

ピーク値を与える r を0dB

短波フェージングの相対頻度特性 （下記文献の図1より）



測定データから
どれも、直線に近い

⇩

$y = mx$

の性質を発見
（パラメータ： m）

待ち受ける心構えのある人の
ところに幸運は訪れる
（パスツール）

セレンディピティ !!

仲上稔, “短波によるフェージングの統計的性質,”電気通信学会誌, no. 239, pp. 145–150, 1943.

仲上m分布

Nakagami-m distribution / Nakagami distribution / The m distribution

（仲上稔、電気通信学会誌、1943）

仲上分布、m分布と呼ばれる場合もある。短波のフェージングデータの特性から見出された分布であるが、移動通信のモデルにも役立つ非常に汎用的な分布

相対頻度グラフから $y = mx$ を発見

↓ 分布の式の導出は最後のスライドに示す資料中に

$$f(r) = \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right)$$

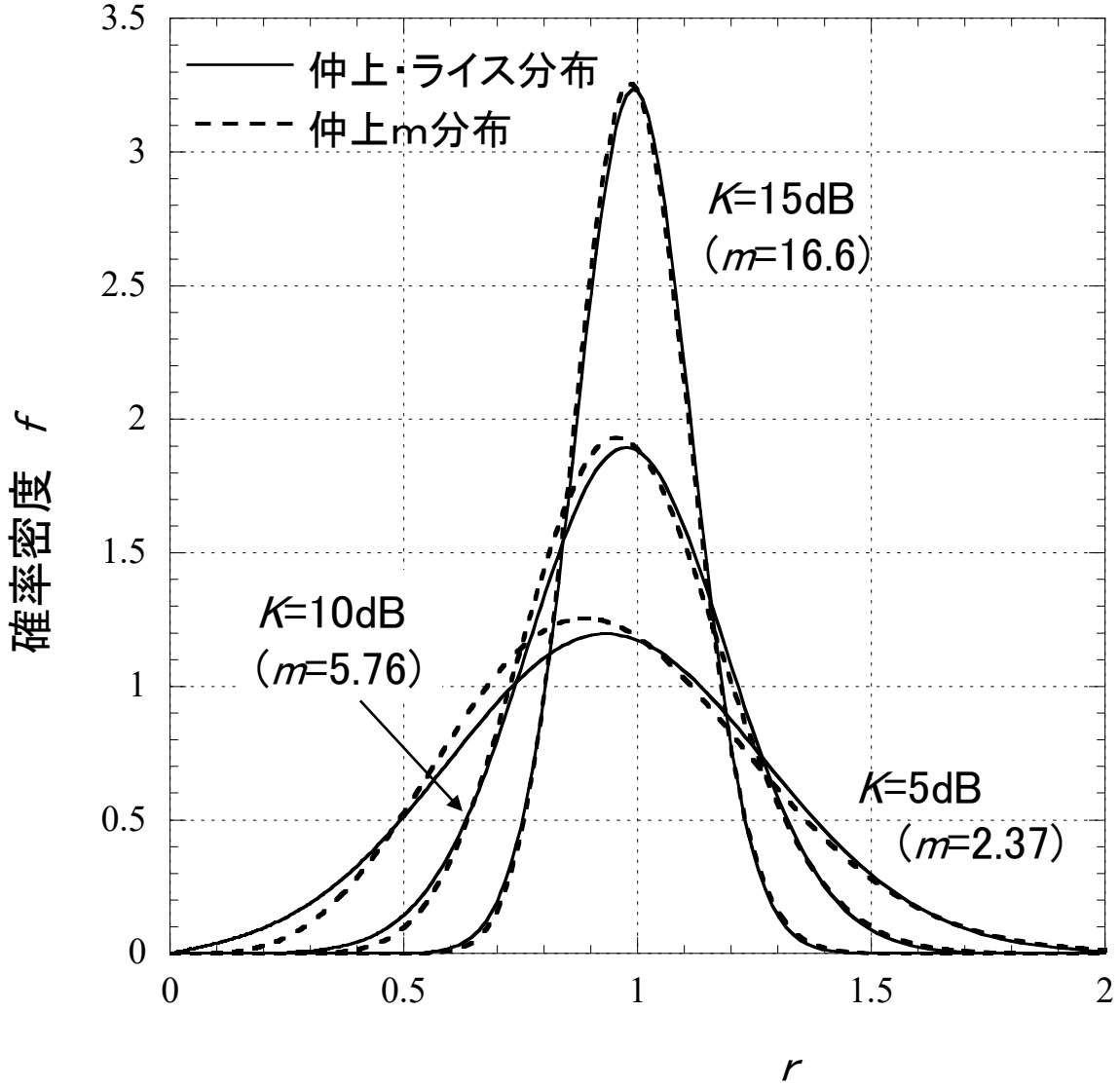
$$m \geq 0.5, \quad \Omega = \left\langle r^2 \right\rangle$$

（m=1でレイリー分布
m=0.5で半ガウス分布）

仲上・ライス分布と分布の形が近い（近似関係にある）。
他と組み合わせての利用する場合に、仲上・ライス分布よりは、解析性に優れている。

仲上・ライス分布と仲上m分布の近似関係：PDFで見る

$\langle r^2 \rangle = a^2 + 2\sigma^2 = \Omega = 1$ （電力正規化）



パラメータ：m と K の換算

$$m(\geq 1) = \frac{(K+1)^2}{2K+1}$$

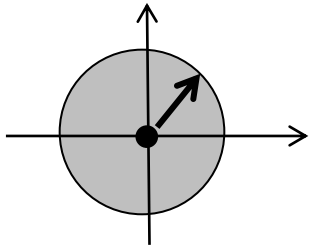
$$K = \sqrt{m^2 - m} + m - 1$$

全体的に見ると
良い近似関係

他の関数と組み合わせて使うとき、解析性が良いので、仲上・ライス分布の代わりにm分布が使われることもある

レイリー分布と仲上の三つの分布との関係

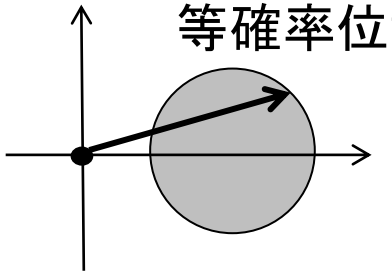
2次元空間での
長さ(ノルム)に対する
確率分布



レイリー分布

(①2次元、②等方、③中心)

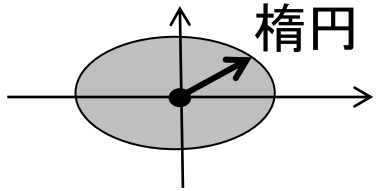
n分布



等確率位置:円

(①2次元、②等方、③**非心**)

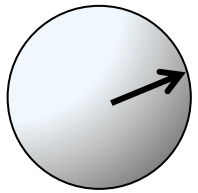
q分布



楕円

(①2次元、②**非等方**、③中心)

m分布



超球面

(①**多次元**、②等方、③中心)

理論的な考察によって
編み出された分布

観測データから見出された
分布だが、
重要な理論的意味をもつ分布

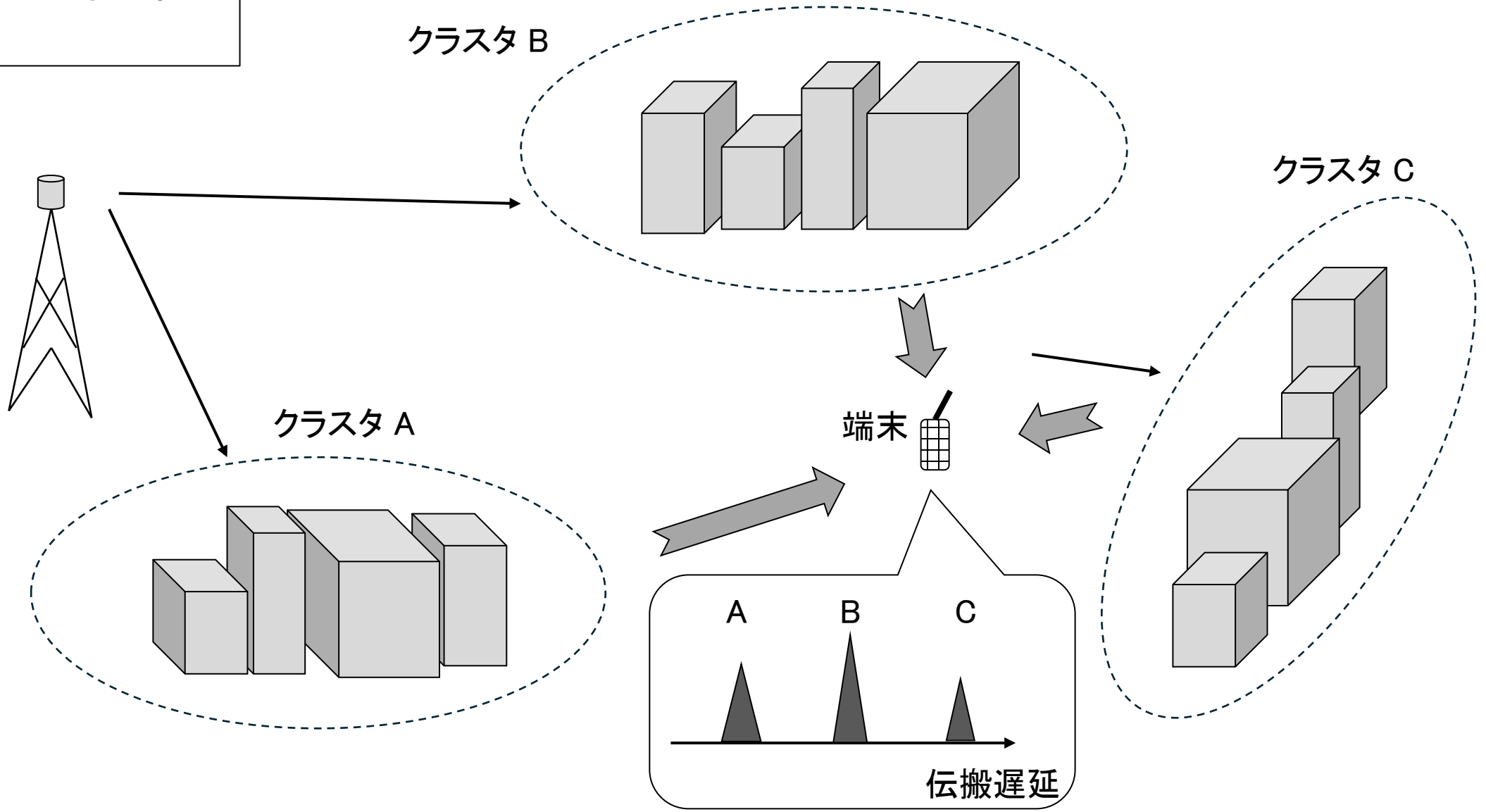
移動伝搬モデルに現れる基本確率分布

通信モデルと確率分布

物理量	代表的確率分布
雑音	正規分布
信号強度	レイリー分布（NLOS）、仲上・ライス分布（LOS）、Loo分布（SLOS） 仲上m分布
待ち時間	指数分布
発生回数	ポアソン分布
ダイバーシチ	ガンマ分布（カイ二乗分布）、非心カイ二乗分布
MIMO	ウィシャート分布
遮へい減衰	対数正規分布
・ ・	・ ・

（各種確率分布の文献情報：最後のスライドに）

マルチクラスタ伝搬環境（イメージ）



このような伝搬環境を表す確率分布モデル
例えば、カッパ・ミュー（$\kappa-\mu$）モデル

もっと複雑なマルチパス伝搬環境を解析するには

１）もっと複雑な（＝多機能な）確率分布モデルを用いる

２）レイトレーシングソフトで伝搬パス解析を行う

３）電磁界解析ソフト（FDTDなど）で計算する

４）多数の実測データ（ビッグデータ）を学習させ、
　　AI（機械学習）により求める

どの手法にも一長一短がある

【統計的推定：観測データを読む】

～確率分布の知識を活かした統計的推定～

(1) 最尤推定（点推定）：最も確からしい母集団特性（母数）の推定

(2) 区間推定（母集団の特性を信頼区間幅で推定）

：間違った判断をしないために

(3) 情報量規準（AIC）：どのモデルを選ぶべきか（良いモデルとは？）

むかしむかし

ばらつきの大きい伝搬データに、
ベテランがエイヤっと線を引く。
そこに名人芸を見た

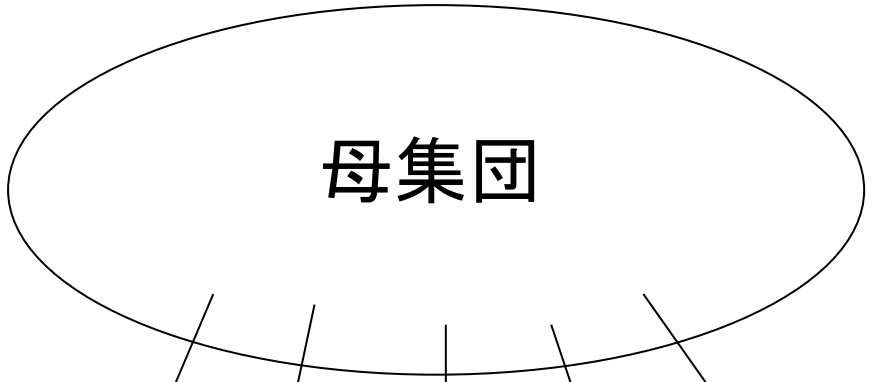
でも、今の時代、これではいけない。

間違った結論を出さないために、
より良いモデルを見出すために
統計的手法を身につけることが大事

最尤推定 （点推定）

得られたデータ（標本値） → 最も確からしい母集団の構造を推定する

基本的な考え方: そういう結果が起きたと言うことは、そういう結果になる確率が最も高かったから（＝ものごとは最も起きやすいように起きる）と考えて母集団の母数を推定する



知りたいが知らない

知っている

得られたデータから、知りたいことを推定する

μ ？　　σ^2 ？

ステップ1： 母集団の構造（確率分布の形）を最初に決める

例： 正規分布

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

ステップ2：データの抽出（標本値を得る）

ステップ3：標本値からパラメータ値（母数）の推定

ステップ３：標本値からパラメータ値の推定 （具体的な手順）

１） 標本値（ x_1 , x_2 , x_3 , x_3 , x_5 ）が同時に発生する確率を求める

$$L(\mu,\sigma^2) = f(x_1)\times f(x_2)\times f(x_3)\times f(x_4)\times f(x_5)$$

尤度関数

２） 尤度関数の値が最大になるパラメータ値を求め、推定値とする

$$\max_{\mu,\ \sigma^2} L \ \rightarrow\ \mu = \hat{\mu},\quad \sigma^2 = \hat{\sigma}^2$$

３） 尤度関数の対数をとった対数尤度関数を作り、パラメータを変数とする微分を行って、極値を探す

その結果、
正規分布の場合の
パラメータの
最尤推定値は

$$\hat{\mu} = \frac{1}{5}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right) \quad \text{（標本平均）}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \hat{\mu}\right)^2 \quad \text{（標本分散）}$$

最小二乗法による
推定結果に一致

不偏分散（$N-1$で割る）ではない !! なぜか？

最尤推定（点推定）から区間推定へ

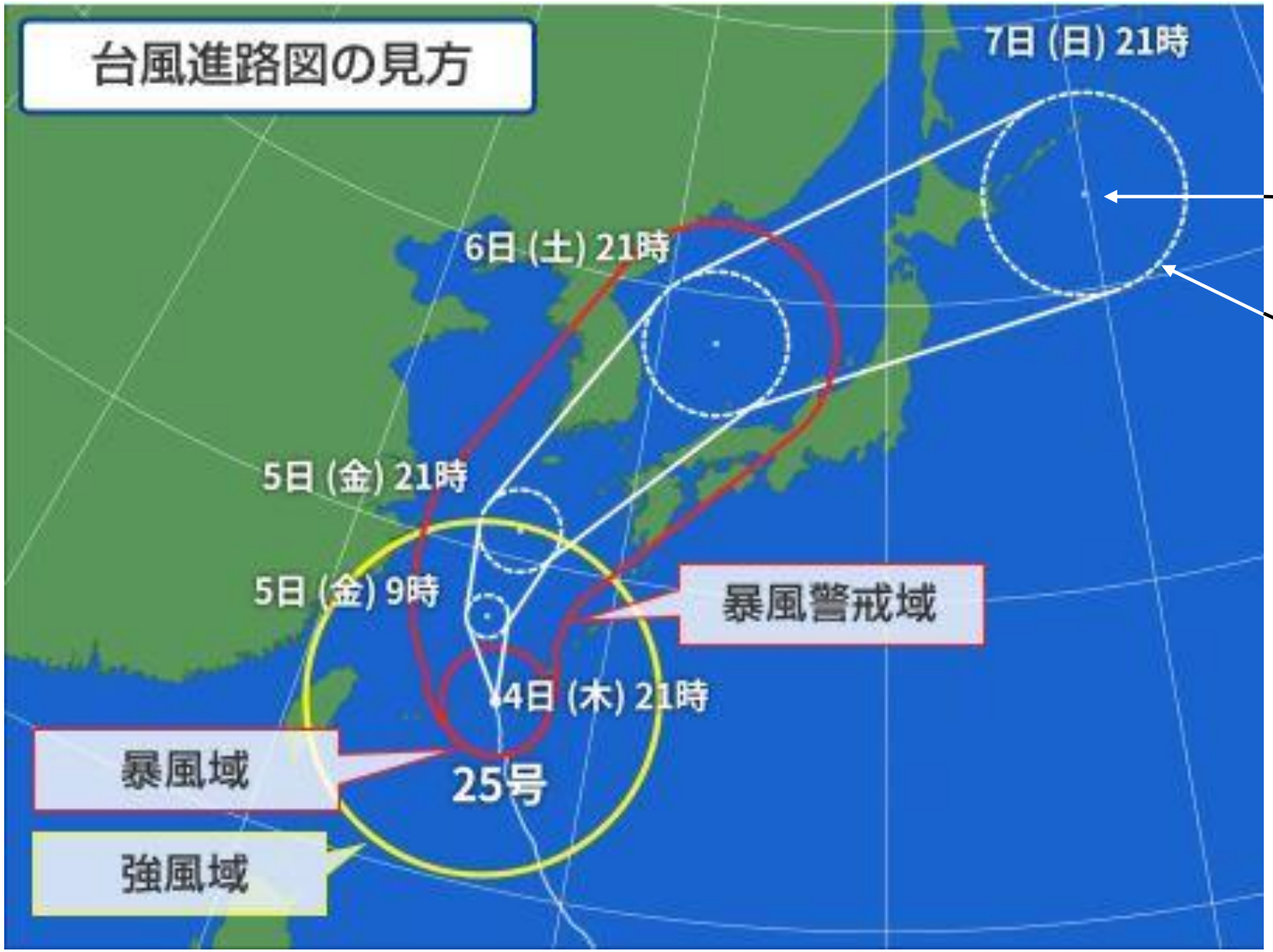
最尤推定：最も確からしいパラメータの値を一つに絞り込む（点推定）

絞り込まれた値が、真のパラメータ値にどのくらい近いのかが分からない

真のパラメータ値が存在するであろう範囲を確率で抑える（区間推定、信頼区間）

その確率は、90%, 95%, 99% が一般的。以下の説明では95%を採用
（確率を上げると確からしさは増えるが、区間幅が広くなって傾向をつかみにくくなる
　区間幅を狭くしようとすると、真の値がその範囲の中にある確率が低くなる）

台風の進路図の予報円（点線の円：70%信頼区間）

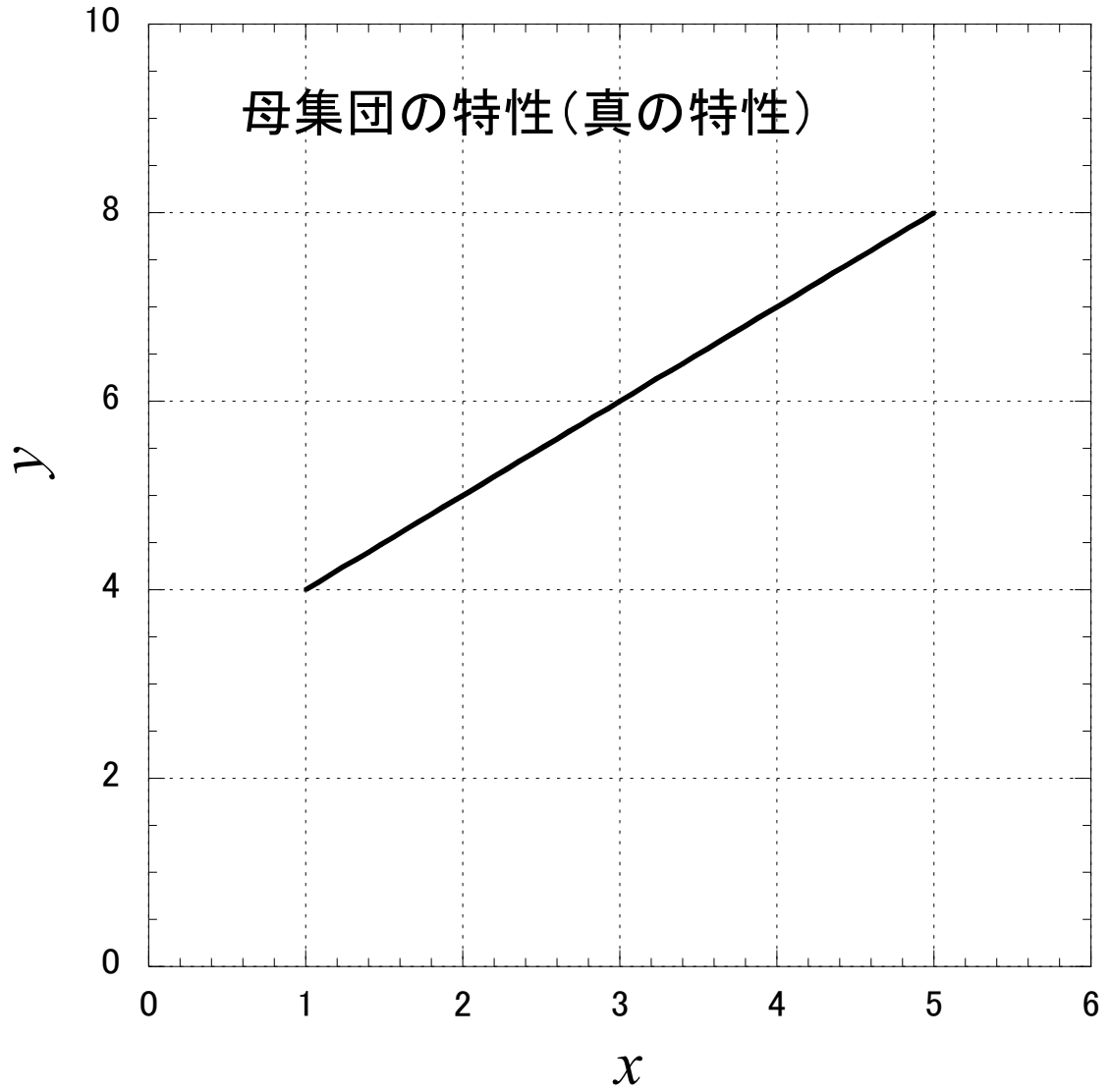


点推定

区間推定
（70%）

Yahoo!天気・災害（気象庁監修） の解説ページより
(https://support.yahoo-net.jp/SccWeather/s/article/H000007777)

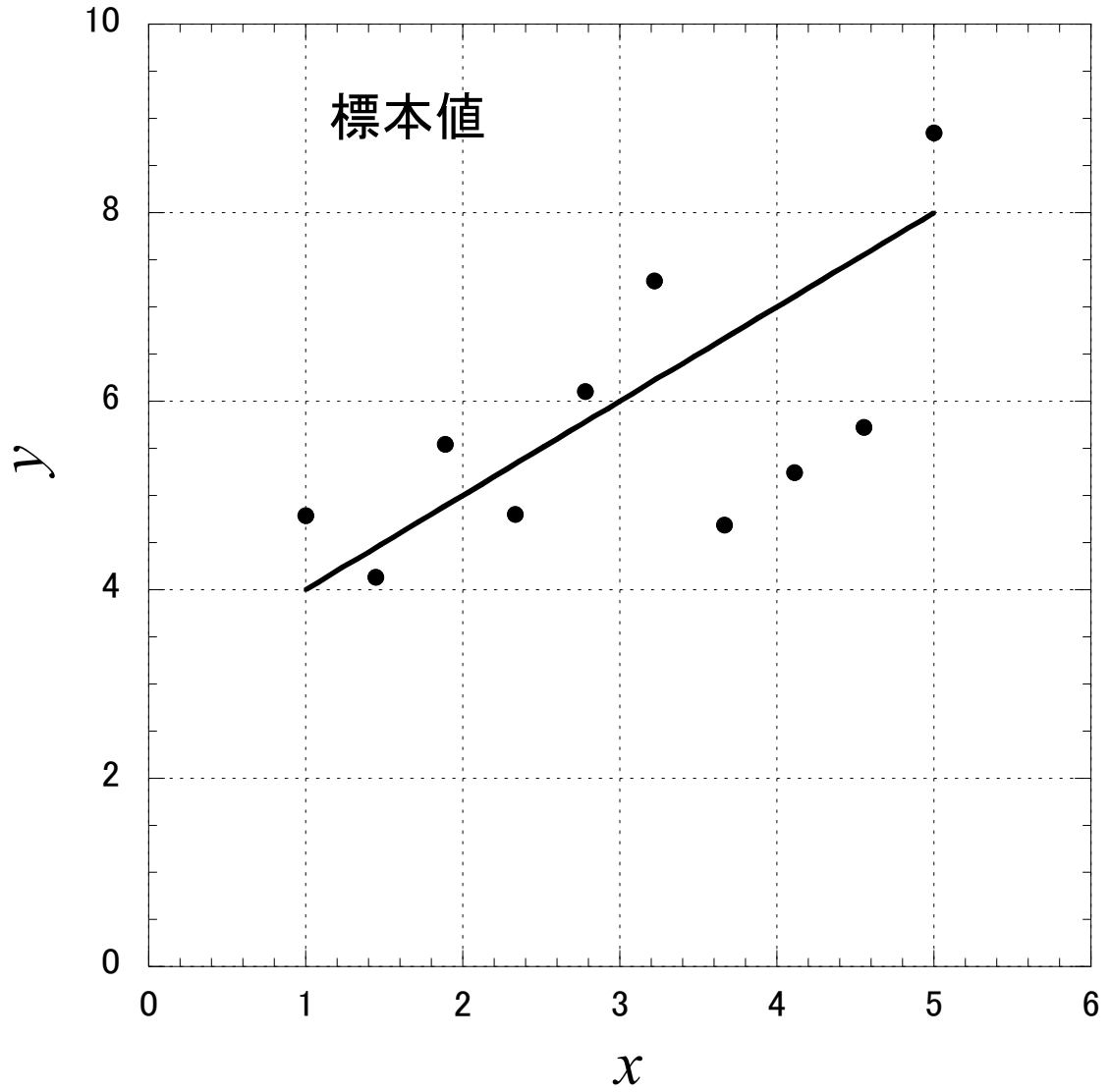
解析の道具： 直線回帰と信頼区間



真の特性を
我々は知らない

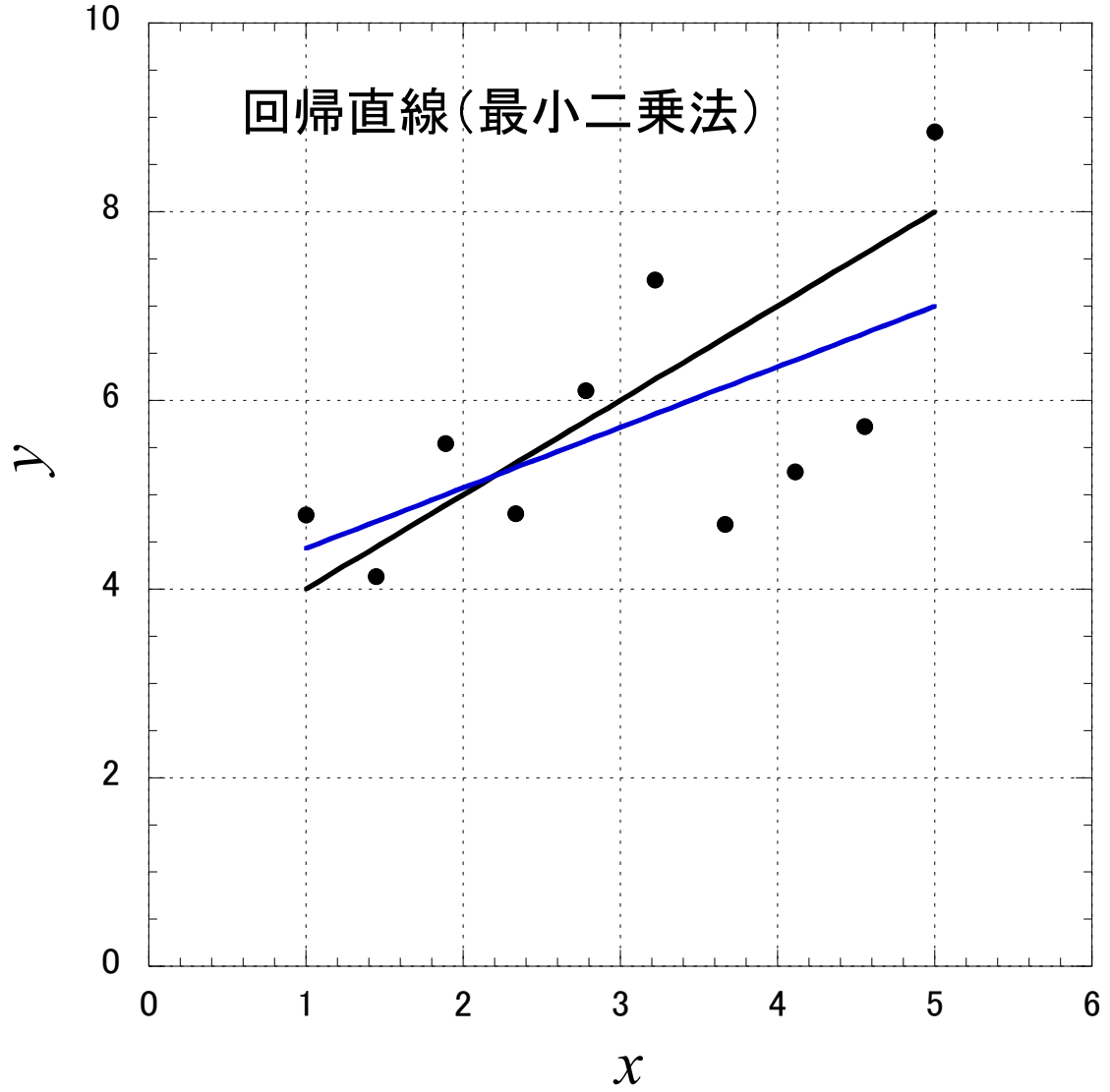
回帰直線を仮定しているので
パラメータは二つ
（平均値と傾き）

解析の道具： 直線回帰と信頼区間



知りえるのは
標本値のみ

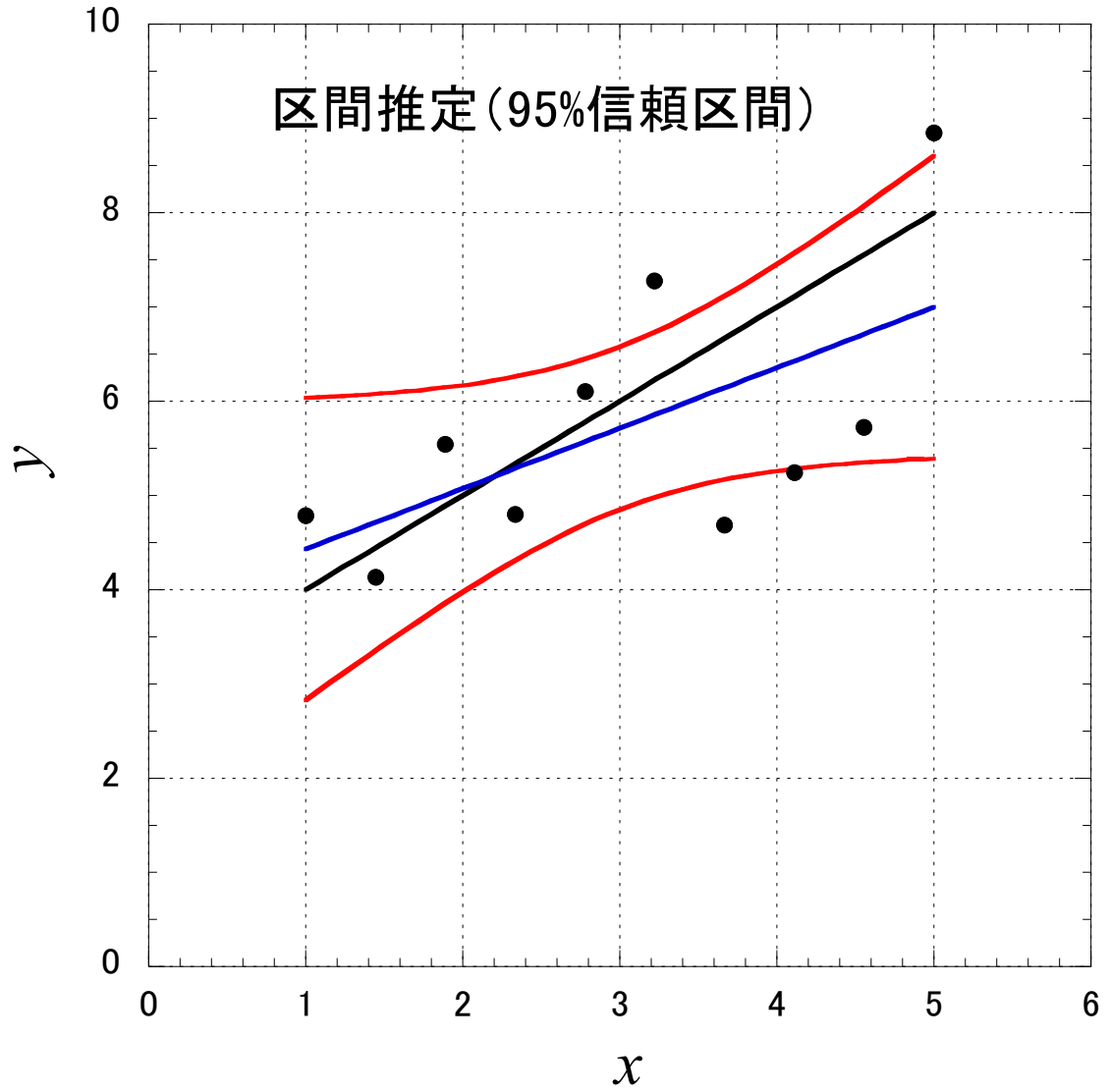
解析の道具： 直線回帰と信頼区間



標本値から
真の特性を推定する

最小二乗法は最尤推定である。
ただし、それがどの程度正しいかは分からない

解析の道具： 直線回帰と信頼区間



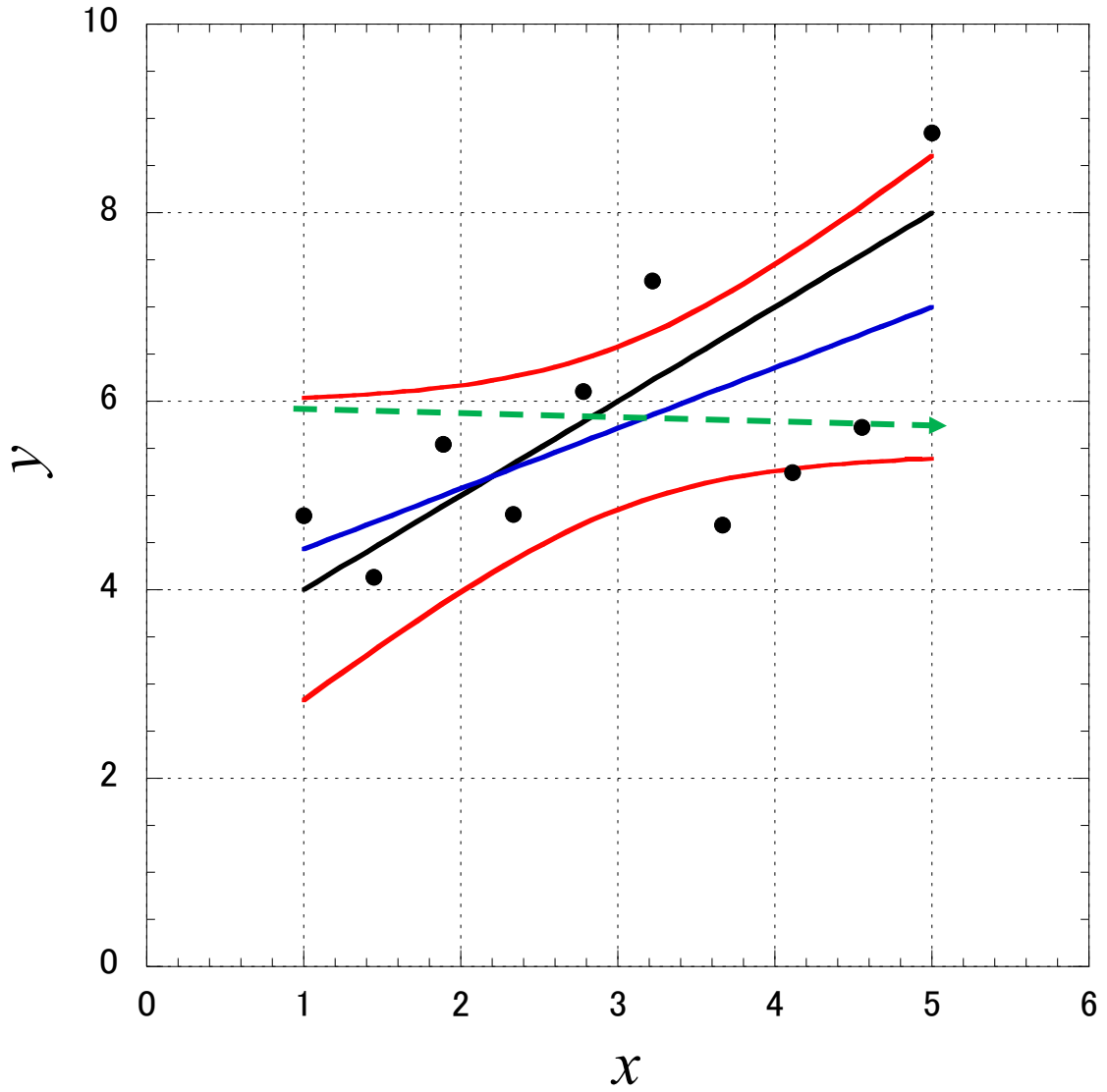
区間推定：
真の特性が存在するであろう確率を定めて、区間で表す

確率値は
90%, 95%, 99%等

以下では95%基準を採用

区間は平均値と傾きのそれぞれの確率分布を求めて、決めた確率の範囲になるように定める
（信頼区間の計算法は教科書で学んでほしい）

解析の道具： 直線回帰と信頼区間

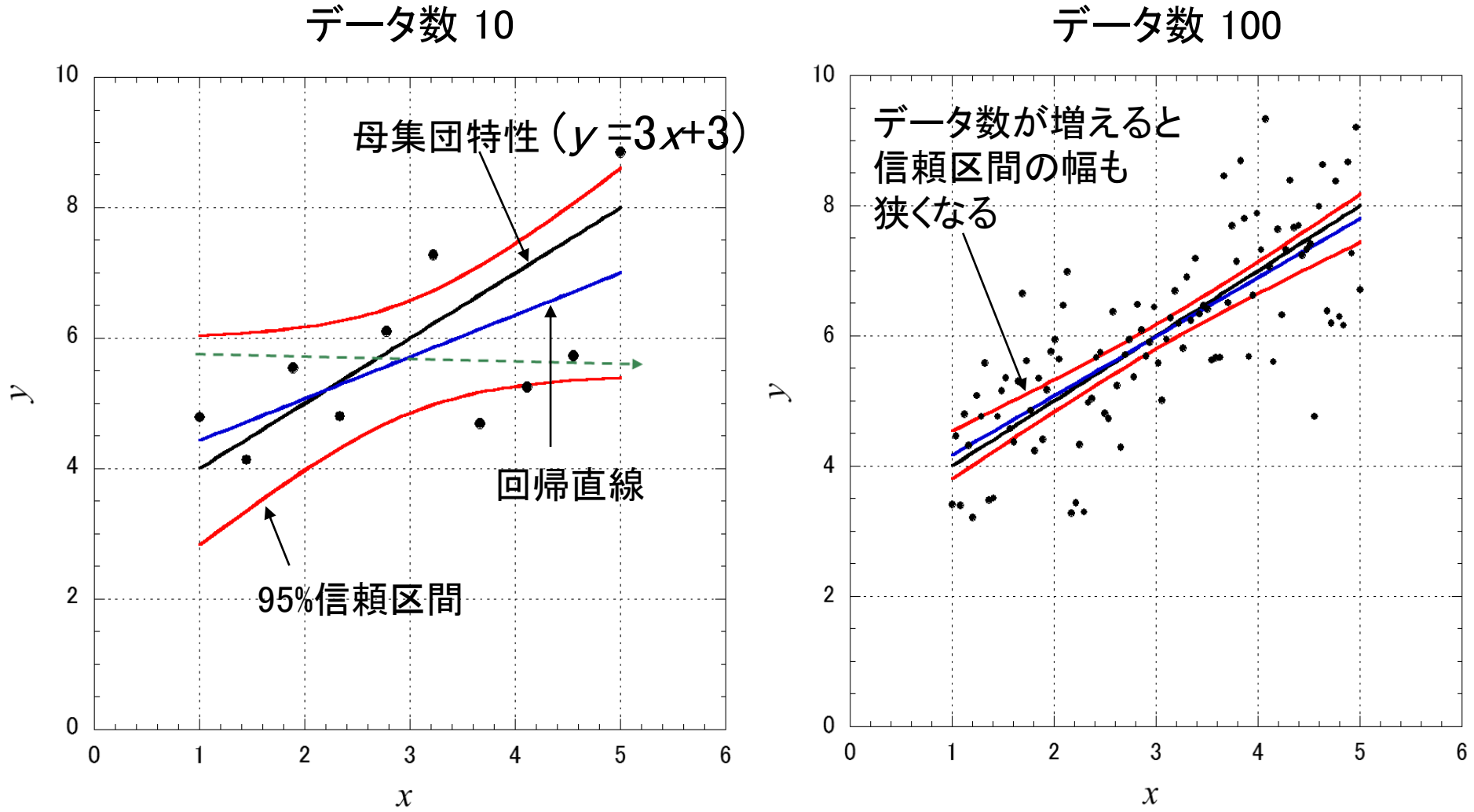


95%信頼区間の中にある直線（緑色の線）は、5%以上の確率があり、棄却できない

この標本値だけでは、xに対して、「増加傾向が有意である」とは言えない

間違った判断をしないための慎重さ重視の推定

解析の道具： 直線回帰と信頼区間



【信頼区間はデータのばらつき幅とはまったく違う‼】

解析例

地球温暖化時代、日本の雨の降り方は変わってきたか？
（降雨減衰量の未来予想のための）

気象庁のデータ（ホームページに公開されている膨大なデータ）を
調べてみよう

【統計的手法】

データの傾向を掴む：　最尤推定（回帰直線推定）

間違った結論を出さないために（結論を出すには慎重に）：　区間推定

よりよいモデルを見出すために：　赤池情報量基準（AIC）

日本全国約1300地点
主要官署では
1880年代後半から

「年」をクリックすると
「月」が出る
「月」をクリックすると
「日」が出る
「日」をクリックすると
「時間」が出る
（ビッグデータ、日本の宝）

気象庁のホームページ



ホーム > 各種データ・資料 > 過去の気象データ検索 > 年ごとの値

年ごとの値

一覧表　グラフ

主な要素　詳細（気圧・降水量）　詳細（気温・蒸気圧・湿度）　詳細（風）　詳細（日照・雪・その他）

地点

降水量（最大）

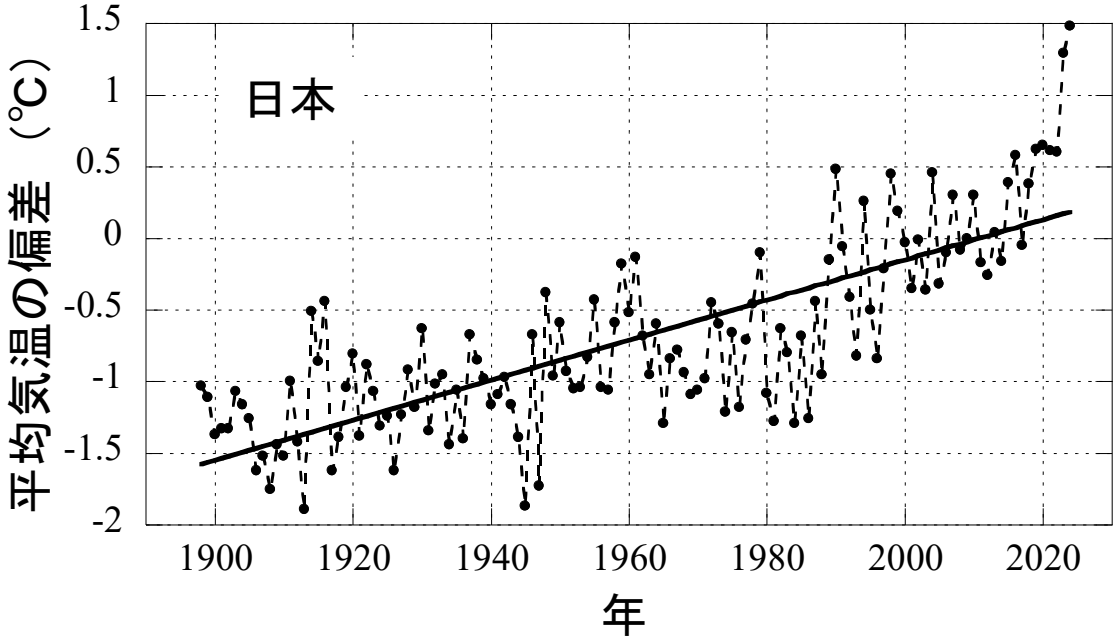
東京　年ごとの値　主な要素

年	気圧(hPa) 現地 平均	気圧(hPa) 海面 平均	降水量(mm) 合計	降水量(mm) 最大 日	降水量(mm) 最大 1時間	降水量(mm) 最大 10分間	気温(℃) 平均 日平均	気温(℃) 平均 日最高	気温(℃) 平均 日最低	気温(℃) 最高	気温(℃) 最低	湿度(%) 平均	湿度(%) 最小	風 平均風速	風 最 風速
1875			1219.2]	94.0]			17.0]	21.9]	12.2]	35.1]	-3.6]				
1876		1014.7	1755.5	76.2			13.6	18.7	8.3	35.6	-9.2	78			
1877		1015.2	1317.3	79.9			14.2	19.1	8.9	34.9	-4.8	77			
1878		1015.2	1764.2	150.9			13.8	18.3	9.6	35.1	-7.6	79			
1879		1014.5	1492.7	99.8			14.6	19.4	10.0	33.9	-5.5	77			
1880		1015.0	1685.7	116.7			14.1	19.2	9.1	33.2	-6.8	76			
1881		1015.1	1444.4	86.4			13.8	18.8	8.5	34.2	-8.4	78			
1882		1015.2	1478.3	109.7			14.0	18.6	9.0	34.2	-6.3	77			
1883		1015.0	1552.6	125.6			13.3	17.8	9.1	32.8	-7.8	76			
1884		1014.9	1314.8	72.2			12.9	17.7	8.6	33.3	-7.7	76			
1885		1014.9	1531.7	149.5			13.1	17.5	9.1	31.8	-9.1	77			
1886		1014.5	1290.3	64.5	12.8]		13.9	18.7	9.9	36.6	-7.7	75			
1887		1013.6	1250.0	77.8	20.5]		13.8	18.6	9.7	32.6	-7.9	76			
1888		1013.7	1378.5	78.9	19.2]		13.5	18.5	9.3	32.8	-7.5	75			
1889		1014.0	1319.3	162.0	22.0]		13.3	18.0	9.3	33.3	-8.1	74			
1890		1013.8	1958.2	123.8	×		15.0	19.4	11.0	33.9	-5.8	77			
1891		1014.1	1220.8	109.0	23.2]		14.4	19.3	10.0	34.4	-6.7	72			
1892		1013.7	1715.1	84.5	20.5]		14.0	18.6	10.0	34.4	-6.8	73			
1893		1014.0	1161.3	56.3	28.1]		13.8	18.8	9.4	34.4	-7.2	71			
1894		1014.4	1320.8	132.8	52.9]		14.8	19.6	10.6	35.1	-5.3	73			
1895		1013.8	1397.8	133.0	22.6]		13.8	18.7	9.8	33.0	-5.7	74			
1896		1014.4	1373.9	74.0	22.2]		14.0	18.7	10.1	34.3	-5.6	74			
1897		1014.6	1497.2	73.2	34.1]		13.2	17.7	9.2	34.0	-7.0	75			

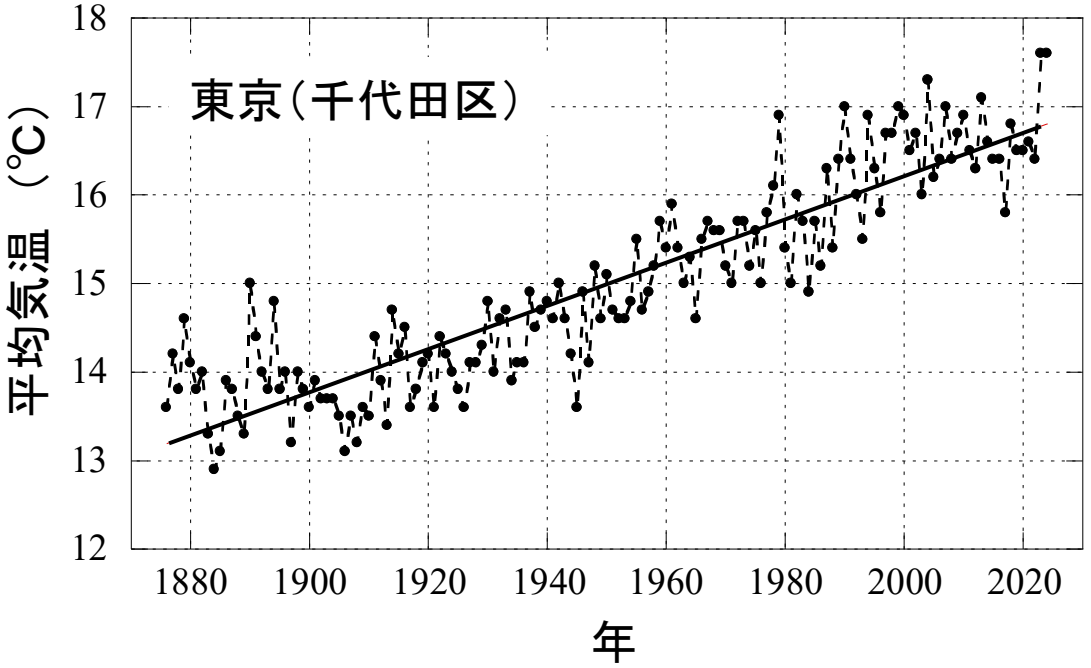
年

我が国の平均気温の推移

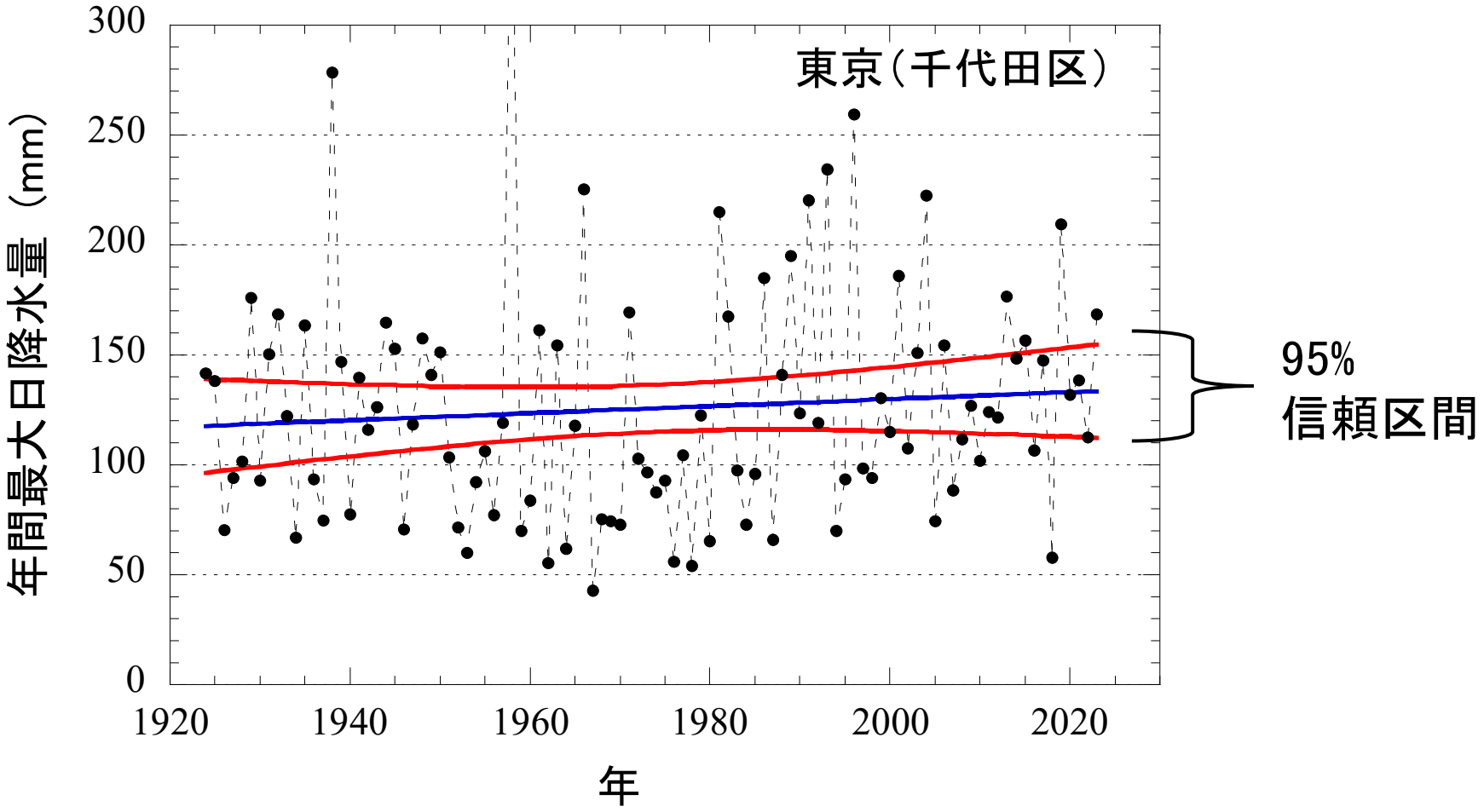
日本
都市化による影響が比較的小さい
15地点の平均
百年間で 1.3℃上昇



東京（千代田区）
地球温暖化に加え、都市特有のヒートアイランド現象が重なっている
百年間で約 3℃上昇

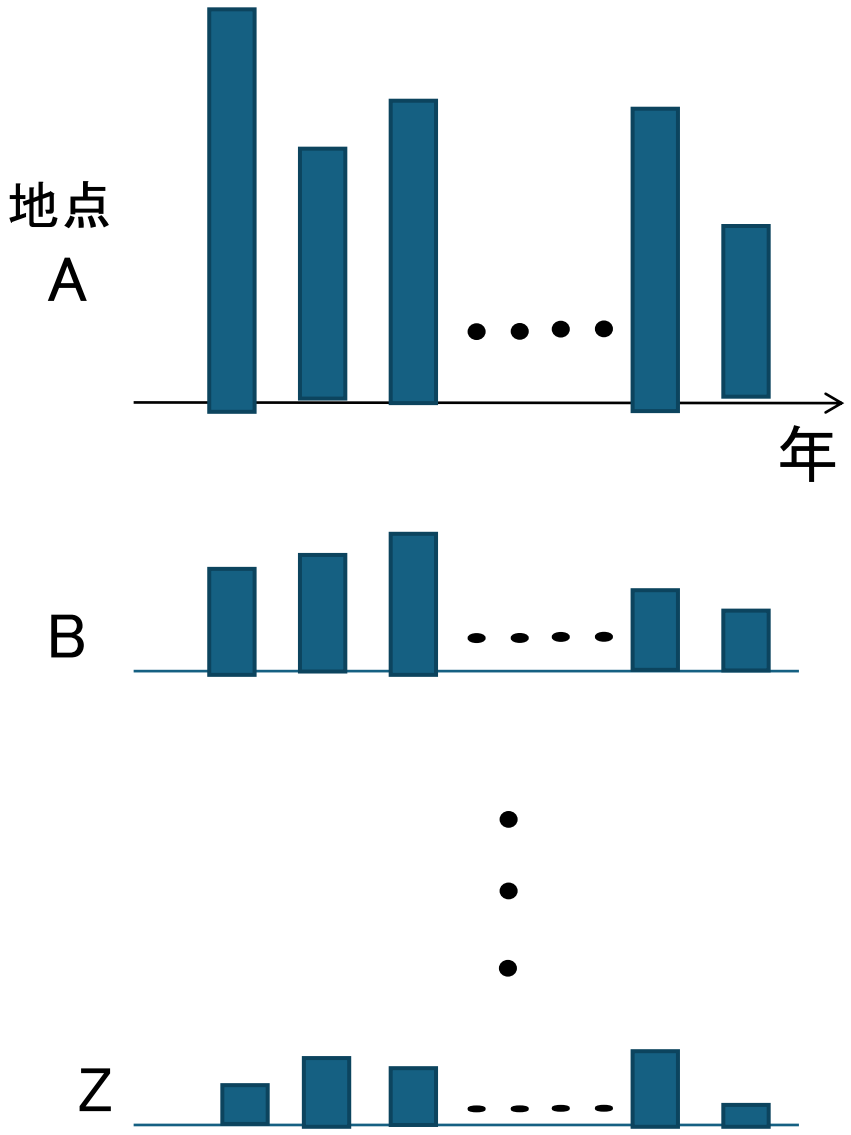


東京における年間最大日降水量の100年間の推移
区間推定（95%信頼区間）をしてみよう



回帰直線（青線）はやや増加の傾向を示しているが、
このデータからは、「増加している」と言う結論は出せない

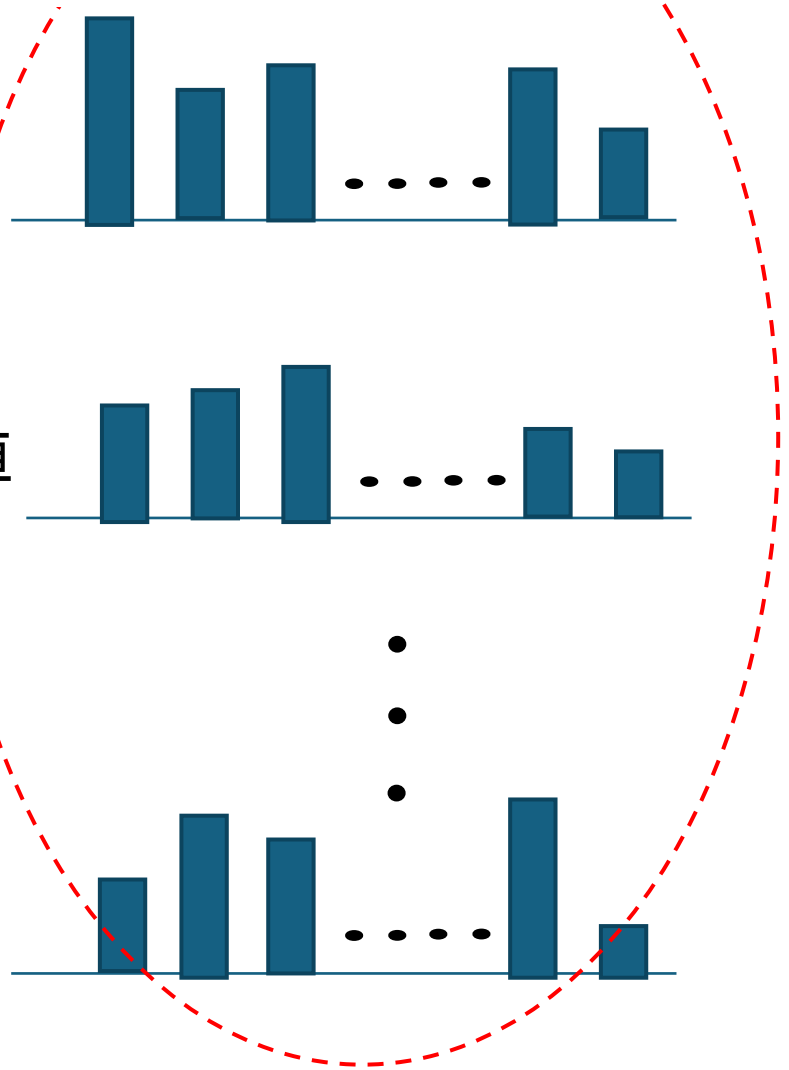
地点毎に最大降水量の大きさの
平均値が異なる



規格化
（平均値
で割る）

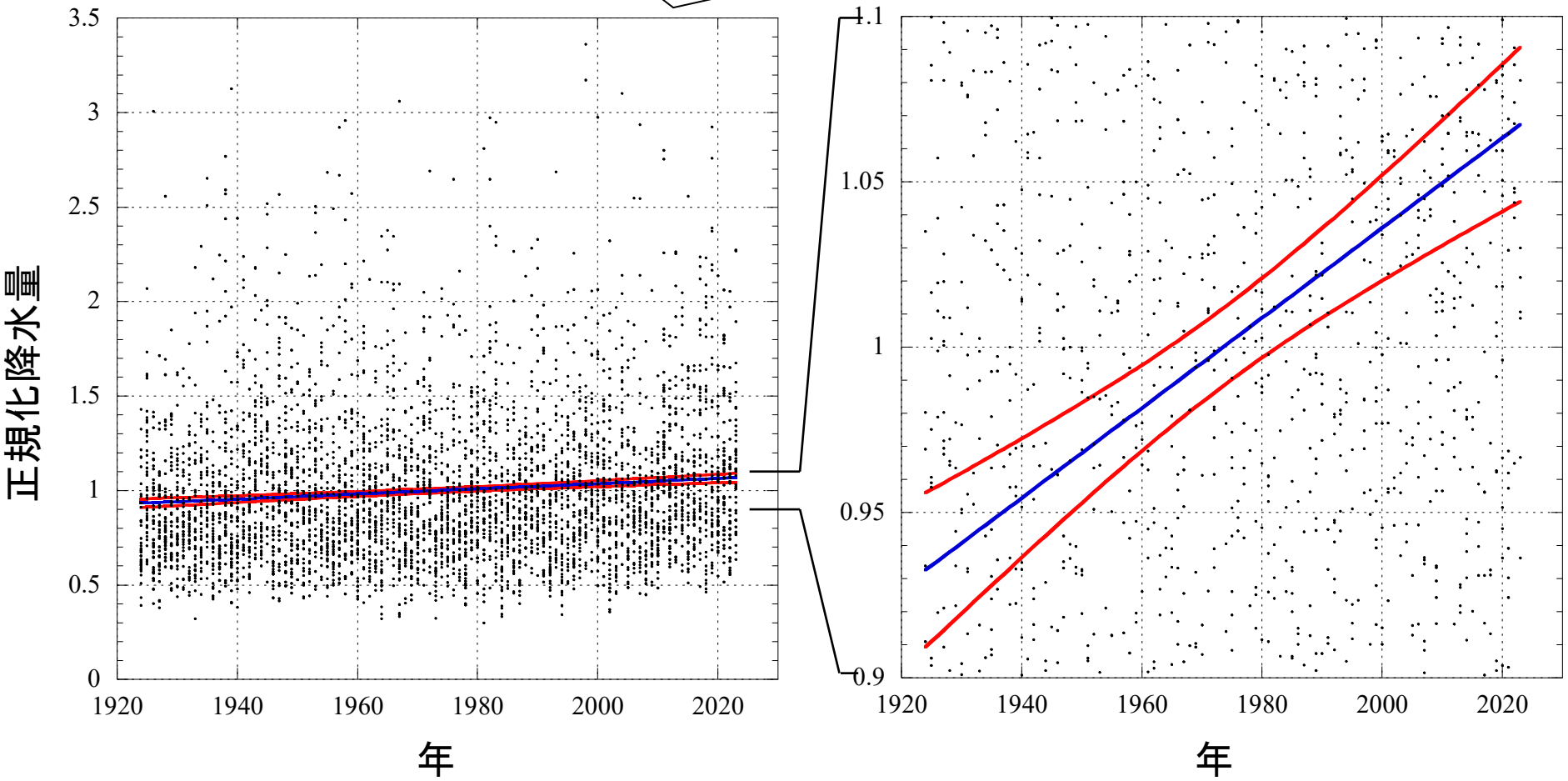
大きさの平均値を同じにする
（長期変化を共通のデータとして扱える）

日本全国をひとまとめにして
データ数を増やす



日降水量

日本全国45地点の100年間分のデータ（データ点数：4500）

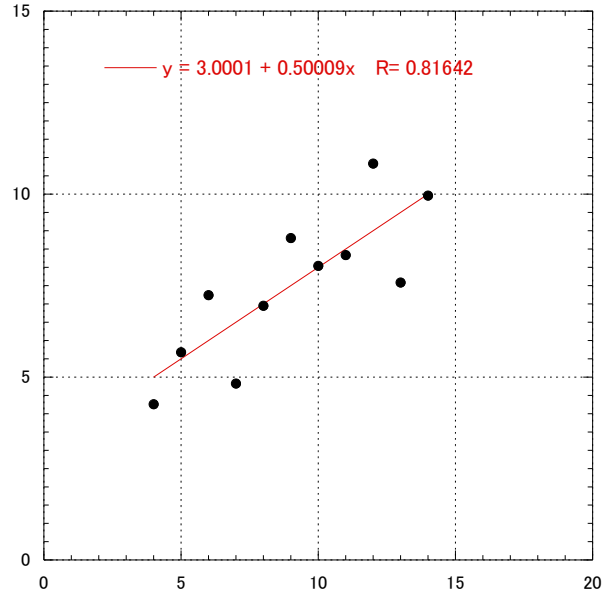


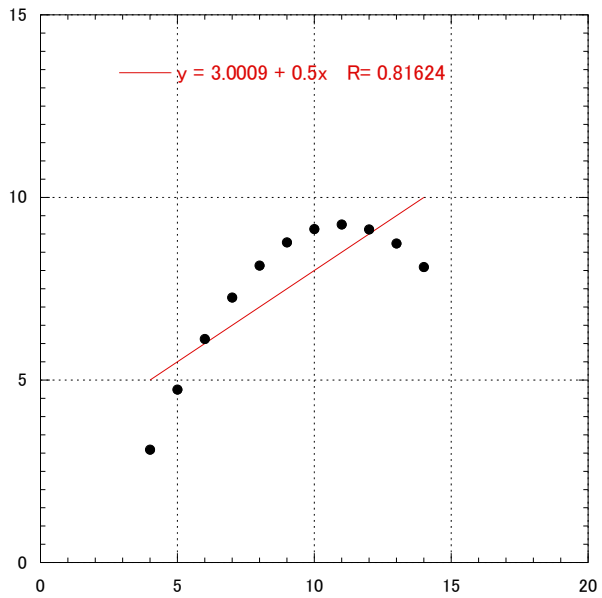
回帰直線（最尤推定）： 100年間で14%の増加

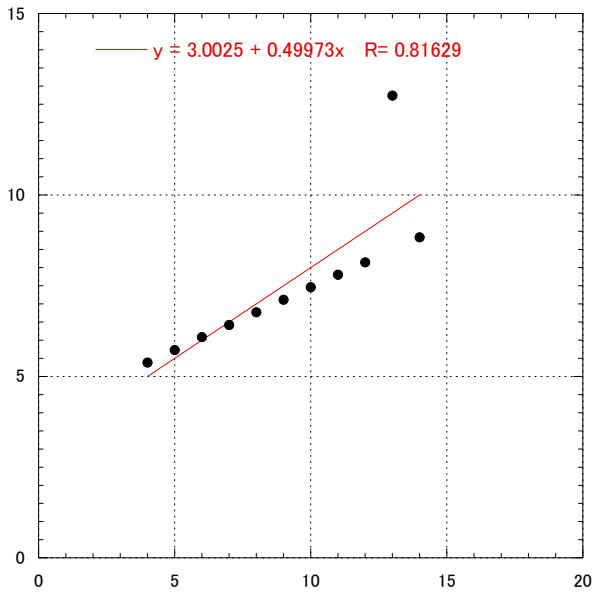
区間推定（95%信頼区間）：9%～20%の増加の範囲 → 増加傾向が有意

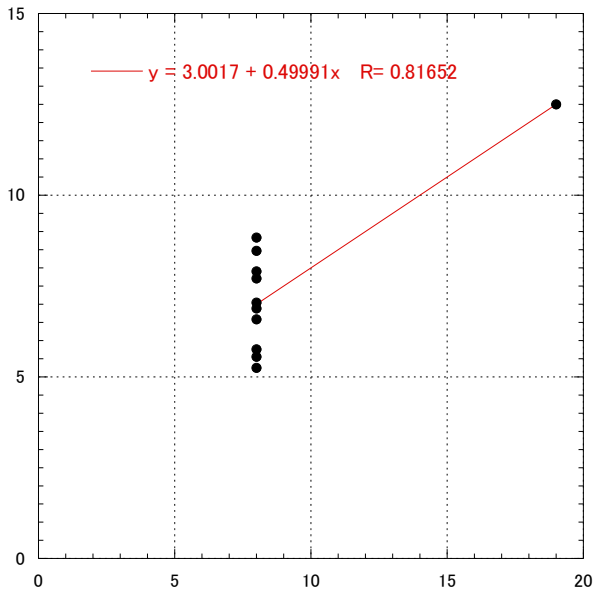
回帰直線推定と区間推定に関する注意点

アンスコムの例（平均と分散と相関係数が同じ → 回帰直線も信頼区間も同じ）









データ処理を始める前に散布図での確認が大事

良いモデルとは?

最尤推定：モデルの形を先に決めて、モデルを構成するパラメータの最も確からしい値を決める推定法

⇩

モデルの型には様々なものがある、その中から一番良いモデルを選ぶ基準は？

⇩

尤度が最も高いモデル（＝標本値を生み出す確率が最も高いモデル
＝二乗誤差が最も小さいモデル）が最良か？　→ いや、そうではない

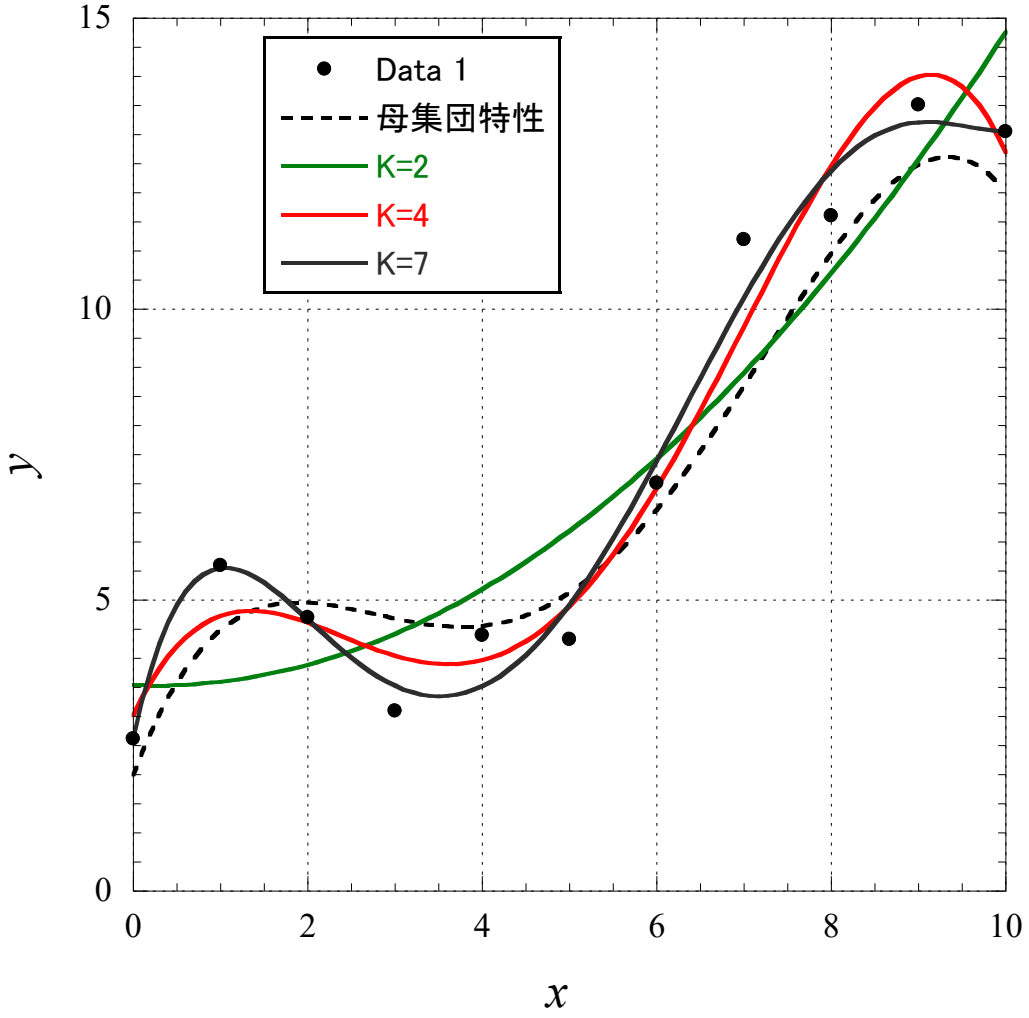
⇩

では、モデルの選択基準は？
AIC（Akaike Information Criterion;赤池情報量規準）

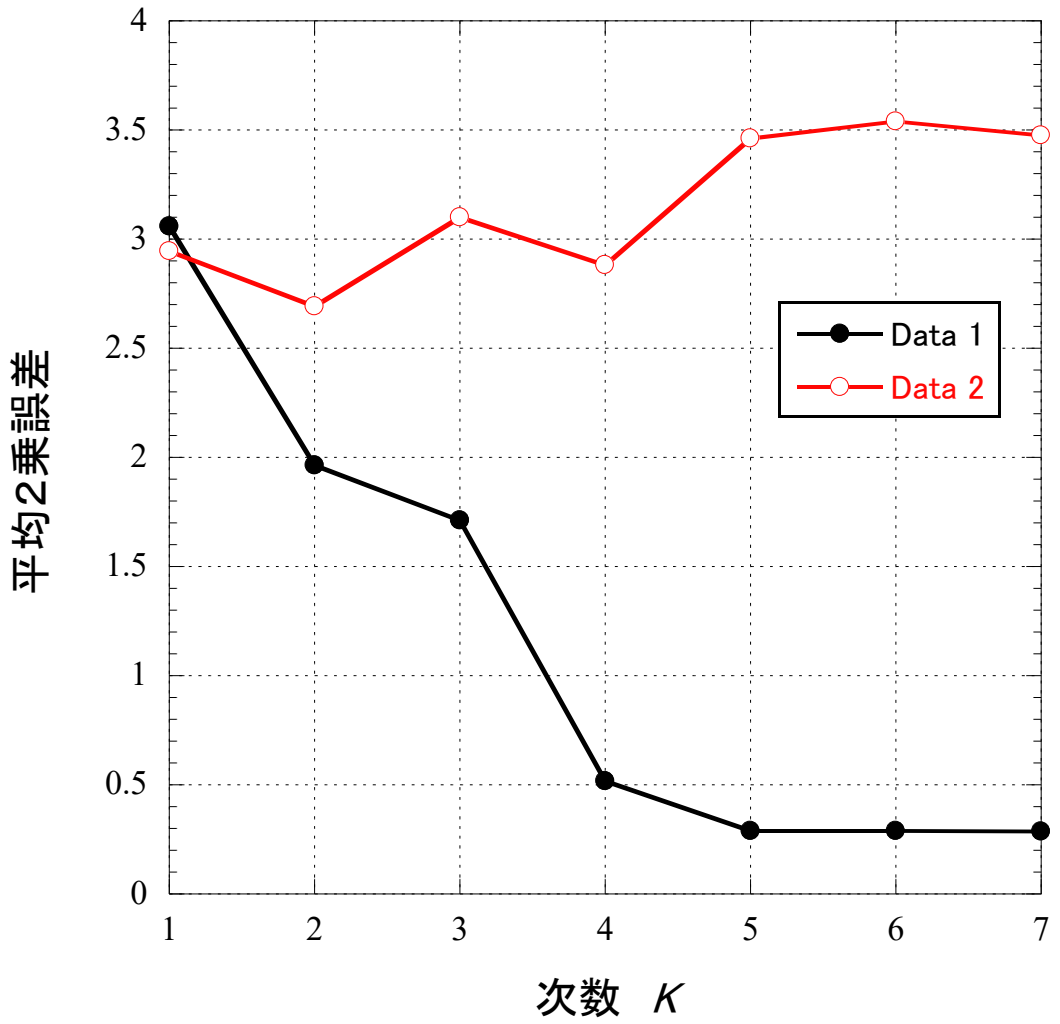
赤池弘次博士（統計数理研究所）、1970年代初頭、AICを編み出した
情報量規準の出発点になる古典理論であるが、ベイズ推定への適用などに
現役手法として生きている

なぜ、推定誤差の小さいモデルがベストではないのか?

多項式近似によるData 1の最尤推定



Data1で作った最尤推定カーブの
別データ(Data 2)に対する平均二乗誤差



より良いモデルを選ぶ指標：赤池情報量基準（AIC）

標本データから、母集団を推定する良いモデルを選ぶ判断基準

良いモデルとは
1） モデル（推定式）と標本値の差が小さい（データによく合う）
2） モデルのパラメータの数が少ない

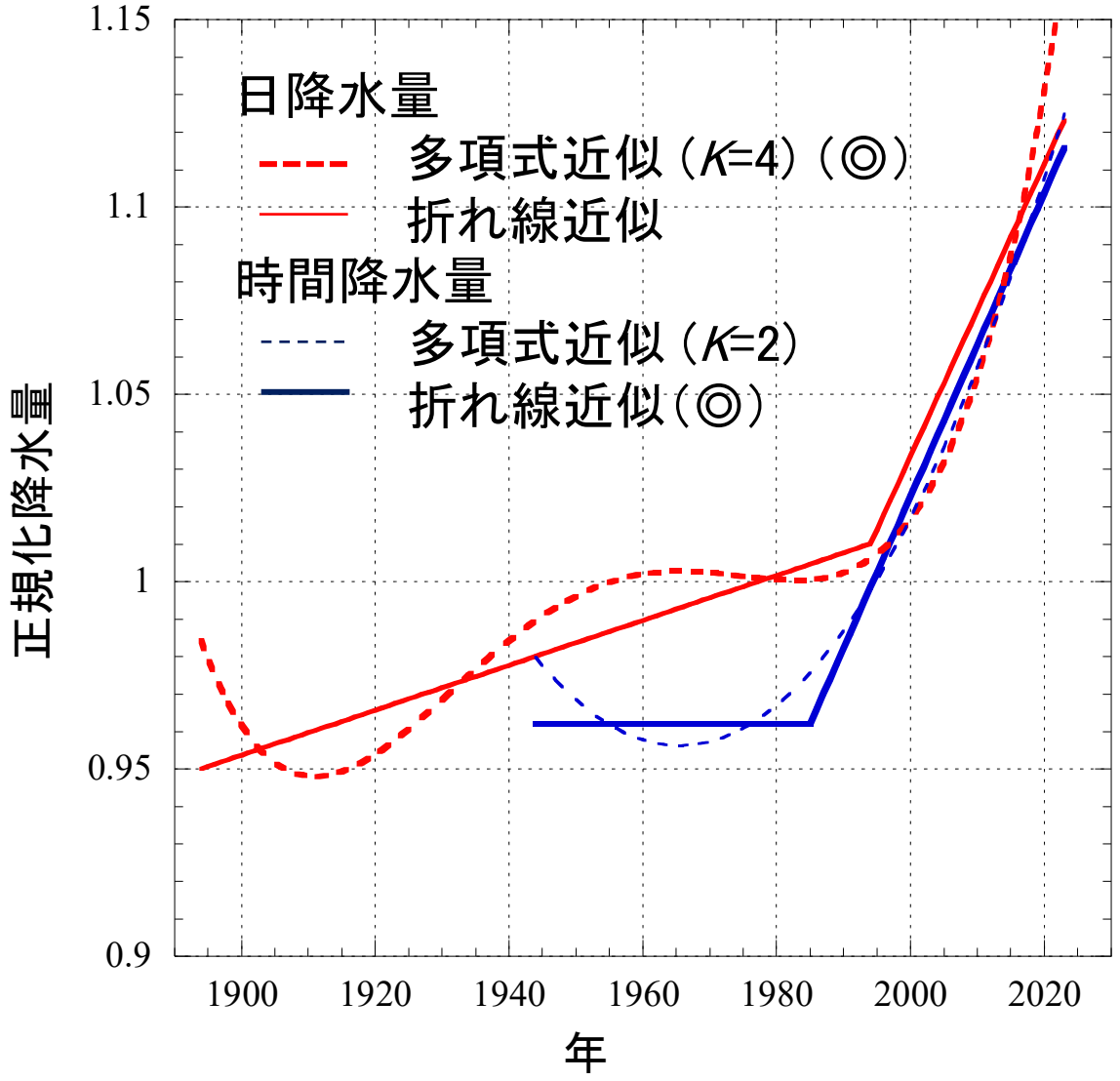
AIC= −2 ×（最大対数尤度）＋2 ×（パラメータ数）

AICの値が小さいほど良いモデル

最大対数尤度とパラメータ数が同じ次元になっているのが奇跡（対数尤度を1上げるメリットとパラメータを一つ増やすことのデメリットが対等）
この基準は今でも現役で、広く使われている
理論は難しいが、確率・統計知識の宝庫（身に着けておくと役に立つ）

「オッカムの剃刀」

日・時間降水量年間最大値の長期変化傾向を多項式と一回折れ線で近似



AICでより良い推定結果を選ぶ

日降水量（130 年間のデータ：赤線）

多項式近似では4次式近似（K=4）が最良
一回折れ線近似では図に示す線が最良
近似同士の比較では多項式近似の方が良い

時間降水量（80 年間のデータ：青線）

多項式近似では2次式近似（K=2）が最良
一回折れ線近似では図に示す線が最良
近似同士の比較では折れ線近似の方が良い

統計的推定法のまとめ

いろいろの統計手法を身につけておくと、
研究や開発を進める上で役に立つ武器になる

持ち駒を多くして、どのような手法がどのようなときに役立つかを
知っておくとよい

手法の詳細（具体的な計算法）は必要になったとき、しっかり学べばよい

電波伝搬解析に現れる確率分布と統計的手法をまとめている
Open Access Book 「電波伝搬モデルの基礎」
補足資料 4　統計的推定の基本を学ぶ

https://www.awcc.uec.ac.jp/radio3/ronbun/TR-YK-078_Probability_Distributions.pdf

（唐沢研究室ホームページのトップページより）