Technical Report YK-024_rev_2
April 06, 2026
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（２）: マクスウェル方程式の美しい形

～ ローレンツゲージの働き ～

大学の学部レベルの電磁気学では、電界や磁界に関する物理量とそれらを関係付ける４つの法則によって組み立てられたマクスウェルの方程式を学ぶ。さらに、一部の教科書では、その後に、マクスウェルの方程式を、二つの電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル）を用いて、より美しい形で表すことができることを教えてくれる。むしろ、この形の方が本質だと言う気持ちも込められている。しかし、この部分の式の導出には、ゲージ変換と言う数学的テクニックが用いられるため、その理解は、学部学生には少し敷居が高いと感じる。難しいと言う意味ではなく、丁寧な説明が必要だと言う意味である。本資料は、マクスウェルの方程式までは学んでいる読者を対象に、この美しい方程式が出来上がるまでを、丁寧に噛み砕いた形でまとめている。ストーリー立ては、文献[1]（砂川重信、理論電磁気学、２章３節）を大いに参考にしている。

本レポートは初期版（2019.07）の改訂版である。
ローレンツゲージの記述により多くのスペースを割いている。

１．マクスウェルの方程式

マクスウェルの方程式は、電界 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、磁界 $\boldsymbol{H}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の４種類の場を表す物理量と、電荷密度ρと電流密度 $\boldsymbol{i}$ の二つの源の関係を表す 4 つ式で表される。（式の物理量の説明は省略）。この方程式を $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ の関係式を使って、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ のみで表すと次式である（以下特に断らない限り磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を磁場を代表して磁界と呼ぶ）。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{（電磁誘導の法則）} \qquad (1a)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{i}+\varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{（アンペア・マクスウェルの法則）} \qquad (1b)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \text{（電場に関するガウスの法則）} \qquad (1c)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \text{（磁場に関すガウスの法則）} \qquad (1d)$$

この 4 つの連立方程式には、全ての電磁気現象のからくりが込められている。もともとは、複雑に組み立てられたマクスウェルの電磁気学の理論を、ヘビサイド（とその後のヘルツ）がこの 4 つの式に整理したものである。物理を支配する法則の意味も汲み取りやすく、優れた表現である。しかし、雑多な感は拭えず、より、物理の本質に近づけるような表現の追及も行われている。その一つに、電界と磁界ではなく、別の物理量である電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル）を用いた表現形式がある。本レポートでは、この形（結果として美しい形になる）が得られるまでを丁寧に掘り起こしてみたい。

２．電磁ポテンシャル

式(1)で表されるマクスウェルの方程式は、原因（ソース）となる物理量（ρと $\boldsymbol{i}$）と結果として現れる物理量（$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$）の関係を表すものと見ることができる。故に、最終的には $\boldsymbol{E}=f_E(\rho,\boldsymbol{i}), \boldsymbol{B}=f_B(\rho,\boldsymbol{i})$ の形になる（注：後に示すように、実際には $\boldsymbol{E}=f_E(\rho), \boldsymbol{B}=f_B(\boldsymbol{i})$の形になる）。この原因と結果を結び付けるその中間にポテンシャルで表される電磁場：**スカラーポテンシャル**ϕと**ベクトルポテンシャル** $\boldsymbol{A}$ を導入する。二つのポテンシャルはまとめて**電磁ポテンシャル**と呼ばれる。スカラーポテンシャルは静電場において $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$ で関係づけられる量（単位：V）である。ベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ として定義される量（単位：Wb/m）で、(1d)式の $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ を恒等的に満たしている。ベクトルポテンシャルで表される $\boldsymbol{B}$ をマクスウェルの方程式の(1a, 1d)式に代入して整理すると以下の式になる。

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\phi \tag{2}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3}$$

これより、電磁ポテンシャルをソース（ρと $\boldsymbol{i}$）で表すことができれば、最終的に求めたい $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が得られることになる。しかし、この後述べるように、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ と $\phi, \boldsymbol{A}$ の関係には自由度があって一対一で定まらない上、関係そのものが複雑であるため、その解法には工夫が求められる。

なお、電磁ポテンシャルが持つ物理的性質そのものについては、ここでは立ち入らないので、文献[2]などを参考にしてほしい。

３．解法のための数学的テクニック：ゲージ変換

解の導出には、**ゲージ変換**と言う数学的テクニックが用いられる。そのゲージ変換の意味を説明したいが、先ずは入口の話から。

求めたい量 P,Q があり、以下のような x,y の関数で与えられるものとする。

$$P=f(x,y),\quad Q=g(x,y) \tag{4}$$

この x, y は次の連立方程式を解いて求められるものであるとする。

$$u(x,y)=0,\quad v(x,y)=0 \tag{5}$$

ところがこの連立方程式が複雑で、解くのが困難であるときどうしよう。もし、

$$w(x,y)=0 \tag{6}$$

という条件を加えることにより、x, y に代る解が x', y'になって解けたとしよう。そのとき、

$$P=f(x',y'),\quad Q=g(x',y') \tag{7}$$

で、P, Q の値が変わらないのであれば、その値を求めることが目的なのだから、x, y の代わりに x',y'であってもまったく問題が無い。x, y は荷物の配達役だと思えばよい。欲しい荷物を届けてくれるのなら x, y に限ることは無い。

(4)式と(7)式が同値となるための条件式(6)が存在すればよいのである。このように、P, Q と $x,$

y が一対一対応でなく任意性が有る場合、(6)式の条件の下、x と y のセットを x'と y'のセットに置き換えることができる。P, Q が x や y の時間・空間領域の偏微分を含むような場合に不確定性が生じ、条件を加えることによる解の絞り込みが可能になる。

マクスウェルの方程式について、具体的に見てみよう。(3)式につては、微分可能な任意のスカラー関数χに対して

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi \tag{8}$$

としても$\nabla \cdot \nabla\chi = 0$なので、$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}'$に置き換えても $\boldsymbol{B}$ の値は変わらない。しかし、この操作は(2)式の $\boldsymbol{E}$ の値を変えてしまうので、その変化を打ち消す項が必要になる。打ち消すためには

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{9}$$

とすればよいことが分かる。

このように、任意スカラー関数χを介して、$\phi, \boldsymbol{A}$ を$\phi', \boldsymbol{A}'$に置き換えることができれば、求めたい $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \nabla\phi' \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' \tag{11}$$

で得られることになる。

量子力学の世界では、ベクトルポテンシャルで表される場は**ゲージ場**と呼ばれる（ゲージは物差し・尺度の意味）。また、上述のように、電磁界不変の下で$\phi, \boldsymbol{A}$ を$\phi', \boldsymbol{A}'$に変換することは**ゲージ変換**と呼ばれる。ゲージ変換は、目的に適う解（$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$）を求めることを容易にするための数学的テクニックである。変換はあくまで任意スカラー関数χを介した変換なのであって、ゲージ変換の式に物理的意味を求める必要はない。

４．ローレンツゲージ

４つのマクスウェルの方程式のうちの二つの式(1a), (1d)を用いて、電界と磁界を以下の式で表した。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \text{((2)式の再掲)}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \text{((3)式の再掲)}$$

最終的に求めたい物理量は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ であるが、そのためには、電磁ポテンシャルϕと $\boldsymbol{A}$ が求められればよいことになる。では、そのϕと $\boldsymbol{A}$ をマクスウェルの方程式から求めて行く。残りの二つの式(1b), (1c)の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を、ϕと $\boldsymbol{A}$ により書き換えると次式を得る。

$$-\left(\Delta-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\mu\boldsymbol{i} \tag{12}$$

$$\Delta\phi+\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{13}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\Delta\boldsymbol{A} \qquad \text{（ベクトル公式）}$$

$$\Delta\equiv\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{（ラプラシアン）}$$

一応、これでϕと $\boldsymbol{A}$ で表されるマクスウェルの方程式を得たが、式の形はアンバランスで美しくなく、かつ、解を求めるのも難しそうである。ここで、前項で述べたゲージ変換の出番になる。

もし、(12)式の左辺第 2 項の中の勾配を求めるスカラー関数が 0 であれば、式が極めて簡潔になることに気がつく。すなわち、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{14}$$

としてよいかどうかである。もし、それでよければ、(12), (13)式は以下のように整理される。

$$\left(\Delta-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{i} \tag{15}$$

$$\left(\Delta-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{16}$$

後に示すように、両式は解くことができ、$\phi, \boldsymbol{A}$ を一意に定めることができる。問題は仮定した(14)式がゲージ変換を満たす条件式になっているかどうかである。以下それを確かめてみたい。

仮定した式(14)の左辺のϕと $\boldsymbol{A}$ をϕ'と $\boldsymbol{A}'$で置き換え、0 と置くと

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}'+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t}&=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{A}+\nabla\chi\right)+\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}+\Delta\chi-\varepsilon\mu\frac{\partial\chi}{\partial t}=0\end{aligned} \tag{17}$$

となるので、これを整理すると、次式が得られる。

$$\left(\Delta-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi=-\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{18}$$

右辺の$\phi, \boldsymbol{A}$ が与えられれば、χが決まる形である。実際には、$\phi, \boldsymbol{A}$ が求められないから条件式を加えて$\phi', \boldsymbol{A}'$を求めているわけで、この式を解いてχを求める必要は無い。$\phi, \boldsymbol{A}$ と$\phi', \boldsymbol{A}'$を結びつけるスカラー関数χが存在することさえ言えればよく、それは式(18)が示している。

この論理によって、仮定した条件式(14)はゲージ変換を与える式であると言うことが確かめられた。式(14)で定められる変換ゲージは**ローレンツゲージ**と呼ばれる（注１）。先にも述べたように、ゲージ変換式の物理的な意味を探る必要は無い。ただし、マクスウェルの方程式を満たす範囲で変換して得たゲージ変換式であるのだから、マクスウェルの方程式に矛盾するものにはなっていないはずである。実際、ローレンツ条件式(14)を変換してゆくと以下の電荷保存則の式（電流連続の式）にたどり着く（注２）。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

なお、ローレンツ条件式からわかるように、スカラーポテンシャルϕが時間変化しない環境（静電界）では、$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$としてよい。この条件でのゲージは**クーロンゲージ**と呼ばれる。

注１）電磁気学では「ローレンツ」が入る用語が３つ出てくる。ローレンツ力、ローレンツ変換、そしてこのローレンツゲージである。ローレンツ力のローレンツもローレンツ変換のローレンツもオランダの物理学者ヘンドリック・ローレンツ（Hentrik A. Lorentz）に由来する。一方、ローレンツゲージのローレンツはデンマークの物理学者ルードヴィヒ・ローレンツ（Ludvig V. Lorenz）に由来する。両者を区別するために、[3]では後者をローレンスと呼び、その場合はローレンツゲージもローレンスゲージになる。

注２）ローレンツゲージの条件式が電荷保存則の式に至る手順は[4] (p. 118, 119)に詳しい。結果式(15), (16)からスタートしており、(14)式からの直接的な導出ではない。ゆえに、導いたというよりはたどり着いたという印象。

５．マクスウェル方程式の美しい形

以上により、マクスウェルの方程式はローレンツゲージを介して以下の式で表されることが示された。

$$\Box \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \text{((15)式の再掲)} \tag{20}$$

$$\Box \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{i} \qquad \text{((16)式の再掲)} \tag{21}$$

$$\Box \equiv \Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad \text{（ダランベール演算子（ダランベルシアン））}$$

上式は対称性に優れた非常に美しい波動方程式である。電荷がスカラー場を、電流（＝電荷の移動）がベクトル場を作ると言う違いを除いて、場の構造が同じであることがわかる。この美しさを見ると、電磁場の本質は、電磁ポテンシャルが支配していると想い描けるであろう。

(20)式からϕが、 (21)式から$\boldsymbol{A}$が独立に解ける。その結果は以下のように表される[5]。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/v)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV' \qquad (v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathrm{V}} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/v)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dV' \tag{23}$$

これは、任意の媒質中に適用できる一般解である。なお、表記は省略するが、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ をρと $\boldsymbol{i}$ で書き下した式は、ジェフィメンコ方程式と呼ばれる。

時間変動の無い場、すなわち静電界と静磁界については、クーロンゲージ（$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$）が採用でき、 (20), (21)式は次式となる。

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{24}$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{i} \tag{25}$$

上式は、スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャルに関するポアソンの方程式と呼ばれ、それぞれの解は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dV' \tag{26}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathrm{V}} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dV' \tag{27}$$

となる。真空中の原点に点電荷 Q がある場合には、(26)式は、デルタ関数を用いて$\rho(\boldsymbol{r}')=Q\delta(\boldsymbol{r}')$と置き換えられ、$\phi=Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$となって、電磁気学の授業の始めの頃に習うお馴染みの電位の式になる。同様に、原点に電流素片を置けば、(27)式はビオ・サバールの法則式に行き着く。

図１はこれまでの議論に基づき、電磁界($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$)、電磁ポテンシャル($\phi, \boldsymbol{A}$)、電磁界の発生源（$\rho$, $\boldsymbol{i}$）の関係を整理してまとめている。

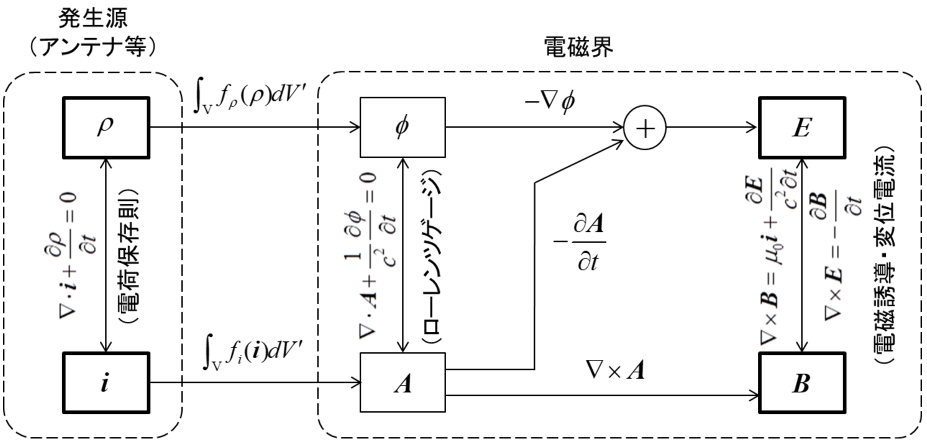

図１　電磁界の発生源（$\rho, \boldsymbol{i}$）、電磁ポテンシャル($\phi, \boldsymbol{A}$)、電磁界($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$) の関係

参考文献

[1] 砂川重信, *理論電磁気学*, 紀伊国屋書店、1999.

[2] 唐沢好男, “*謎解き電磁気学；第５章 ベクトルポテンシャル*, ネット公開私製本.

[3] 太田浩一, *電磁気学の基礎 I*, 東京大学出版会, 2012.

[4] 村上雅人, *なるほどベクトルポテンシャル*, pp. 118-119, 海鳴社, 2020.

[5] 宇野亨, 白井宏, *電磁気学*, コロナ社, 2010.

読者の皆さんへ

ベクトルポテンシャルの働きについては
謎解き電磁気学；第５章 ベクトルポテンシャル
で詳しく解説しています。