Technical Report YK-031_rev
Oct. 14, 2022
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（９）：数学が支える電磁気学の法則

“ガウスの発散定理とガウスの法則”, “ストークスの定理とアンペアの法則”にみる定理と法則の関係

電磁気学は電気と磁気に関するいくつかの物理法則の上に理論が組み立てられている。では、この法則とはどういう位置づけになるのだろう。同じような言葉で、定理もあるが、何が違うのだろう。例えば、ガウスの発散定理とガウスの法則、ストークスの定理とアンペアの法則、同じようでもあり、違うようでもあり、微妙な関係に見える。電磁気学に現れる種々の法則を題材として、物理の法則が数学の定理に支えられている姿を見てみよう。

本レポートは YK-031 (Aug. 30, 2019)の改訂版である。分かりやすさに注力し、章構成および内容を大幅に変更している

１．定義

（１）定理と法則

一言で言うと、**定理**は、公理を前提として演繹手続きによって導きだされる命題。その正しさは、公理に基づく数学的な証明によって示される。**法則**は、ある物事と他の物事との間に一定の関係があるときに、その関係を表す言葉あるいは式。その関係が必然性や普遍性を持つと認められたとき、法則と呼ばれる。観測や実験から帰納されたもの、すなわち、経験則であり、数学的に証明されるものではない。自然科学に対する法則に対しては、自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。法則に当てはまらない物事が見つかると、新たな法則に置き換えられたり、廃棄されたりする。

このように、定理は数学、法則は物理（物事の仕組み）の用語であり、概念として別物である。しかし、この後見てゆくように、法則の中に定理で示された性質が生きる形が多く、定理が法則を支える姿が浮き上がってくる。

（２）発散と回転

電磁気学に現れる定理や法則には、ベクトルの “発散”や “回転”で表されるものが多い。発散（divergence）も回転（rotation）もベクトル解析で定義されている数学用語である。しかしこの言葉には、特に日本語において、学ぶ際の誤解を招いているのではと言う懸念がある。 “発散”と言う言葉には、集中からの広がり、あるいは拡散のニュアンスも含まれる。しかし、数学の意味における発散は、広がりの元になる “湧き出し”、ホースで水を撒くときのホースの口元から水が溢れる部分（流束の出発点）を言う。そこから先、流束が空間に広がってゆく部分は、発散ではない。単なる、広がりである。本レポートでも発散の説明用語としては “湧き出し”を多用する。数学的な説明においては、定義されている “発散”を使わざるを得ないが、発散と言う用

語の使い方や意味に対しては注意深く見てほしい。

“回転”と言う用語も同様である。鳴門海峡の渦潮を見れば、それを回転と思うように、回転と言う用語からは渦巻きが連想される。しかし、数学用語の回転は渦を言うのではなく、渦を発生する源、回転力を言うのである。ドリルの回転軸、あるいは、捩れの力を蓄えた棒のようなものである。その結果、空間に渦が生まれるが、それは（数学用語としての）回転ではなく、渦（還流あるいは循環）である。“発散”で述べたと同様な事情で、“回転”は使わざるを得ないが、このニュアンスを常に意識しておいてほしい。

数学での“発散”と“回転”の意味（直感的な描像）

発散（$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$）：点からの湧き出し（噴水の口元、面や領域からの湧き出しもあるが基本は点から）

→周囲に流束 $\boldsymbol{A}$ の３次元的な広がりを生み出す。流束が広がるだけの領域には“発散”はない。

回転（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）：棒における捻れ（ゴム紐を捩じってプロペラを回すおもちゃの飛行機のゴム紐の部分）

→周囲に渦（流束の循環）$\boldsymbol{A}$ を生み出す。渦ができているだけの領域には“回転”は無い）

２．ガウスの発散定理

2.1　ガウスの発散定理とは

閉曲面 S で囲まれた内部空間 V がある。ガウスの発散定理は、対象空間内で定義されるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の内部空間 V での性質とその表面 S での性質を等式で結びつけたものであり、以下の式で表される。

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \qquad \text{【ガウスの発散定理】} \qquad (1)$$

このような、積分変換で表される定理は積分定理と呼ばれる。定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明についてはここでは割愛し、式が意味するところだけを簡潔に述べる。（証明はベクトル解析の教科書を見てほしい。難しくない）

同式の左辺は、内部空間 V にあるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散（＝湧き出し）を全部集めたもの（＝湧きだしの総量）である。一方、右辺は、表面 S から、その面に垂直に向かうベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の成分（流束）を面全体で積分したものであり、表面から出てゆく量の全体に当たる。

ガウスの発散定理を一言で言えば、内部で湧き出す量（左辺）は表面からあふれ出る量（右辺）に等しい、であり、至極当然と言う気持ちで受け入れることができると思う。

なお、ガウスの発散定理も、この後述べるストークスの定理も、時間的には定常で、空間的な性質についてのみのものである（時間の関数は入っていない）。物理で学んだ近接作用の目で、ある瞬間に領域の中央に発散が起きたとき、その影響は領域の表面まで届くのに時間遅れするの

だから、例えば、球の半径を 1 光年とすれば、動的現象について(1)式の右辺と左辺を等号で結ぶことはできない。故に、(1)式はあくまで静的状態にある時（時間の関数にならない）に成立する式である。時間的に変化し、その影響の時間遅れが問題なる場合は、当然それを考慮した式の修正が必要になり、それは物理への応用に際して、物理を扱う側で考慮されるべきことになる。

2.2　ガウスの発散定理からの帰結

最も単純な対称構造で、かつ、電磁気学の理解に本質的な帰結をもたらす三つのケースにガウスの発散定理を適用してみたい。

（１）ケース１：原点に発散がある場合

球座標の原点（r=0）に発散（湧き出し）があるとする。すなわち

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(r)=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0\,\delta(r) \tag{2}$$

ここで、δ はディラックのデルタ関数であり、その体積積分が$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0$となるようにしている。原点を中心とする半径 r 上のベクトル $\boldsymbol{A}$ は、ガウスの発散定理の(1)式より、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の向きは径方向（r 方向）であり、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ を球座標を用いて表すと、

$$\boldsymbol{A}=A_r\hat{\boldsymbol{r}}\quad\left(\hat{\boldsymbol{r}}\equiv\boldsymbol{r}/r\right) \tag{3a}$$

$$A_r=\frac{1}{4\pi r^2}\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0\quad\left(r>0\right) \tag{3b}$$

これより、球の外部では距離の２乗に反比例して弱くなることが分かる。

（２）ケース２：発散が半径 a の球に均一に分布する場合

半径 a の球（体積 V）の中に単位体積当たり$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0$というスカラー量が均一に満たされているとする。球内に総量$(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0)V$のスカラー量があるということである。

まず、球外の $r\geq a$ を見てみよう。ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の径方向成分は、

$$A_r=\frac{V}{4\pi r^2}\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0=\frac{a^3}{3r^2}\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0\quad\left(r\geq a\right) \tag{4}$$

となり、ケース１の$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0$を$(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0)V$と置き換えた場合の結果と変わらない。球内一様にベクトル関数の発散（スカラー量）が分布する場合の球の外部におけるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は、全スカラー量を重心の一点に置くのと等価であると言うことを示している。

このベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散を調べると、球座標では、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)=0\qquad\text{(r>a)} \tag{5}$$

となって、当然ながら、この部分にはベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散は無い。距離の増加に対して広がって薄くなってゆくイメージである。

次に、球内に一様に分布する場合の球内のベクトル関数を求める。球内でも同様に、その対称性により、ベクトル成分は径方向のみである。ガウスの発散定理より、A_r は、

$$A_r = \frac{r}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0 \quad (r<a) \tag{6}$$

これより、球の内部では距離 r に比例した強さになることが分かる。このベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散を調べると、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}_0 \tag{7}$$

となって、左辺と右辺で辻褄が合っていることが確かめられる。

（３）ケース３：発散が無限の直線上に分布する場合

円筒座標の z 軸上（r=0）無限の長さに亘って、単位長さあたりスカラー量 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0$ が連続的に存在する場合を考える。この場合は $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ は次式で与えられる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(r,z) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}_0\,\delta(r) \tag{8}$$

ガウスの発散定理より、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は径方向（r 方向）のみに成分 A_r をもち、次式となる。

$$A_r = \frac{1}{2\pi r}\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0 \quad (r>0) \tag{9}$$

これより、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は z 軸からの距離 r に反比例することが分かる。

ケース３における $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の存在範囲を半径 a の筒状にすれば、ケース１とケース２の関係で調べたような性質がここにも見られることになる。

これらのことをまとめると、ガウスの発散定理からは、構造が対称である場合には、以下の性質が見えてくる。

① 発散（湧き出し）が原点にある場合は、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は r 方向の成分を持ち、その大きさは、原点からの距離の２乗に反比例し、球内では距離に比例する。（発散が球の表面上のみにある場合は、球の内部のベクトル関数は値が 0 になる）

② 発散のある領域が球形で、かつ、その発散が均一に存在するとき、その発散の全量を球の中心（重心）においても、領域外のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は同じである。

③ 円筒座標の z 軸上の無限の範囲に発散が均一な密度で存在するとき、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は径方向に成分を持ち、その大きさは r に反比例する。

３．ガウスの発散定理が支える電磁気学の法則

3.1　クーロンの法則

クーロンの法則の生まれる経緯を見てみよう。クーロンは自らが工夫して作ったねじり天秤を用いて、距離 r 離れた二つの電荷（Q と q）に働く力 F を測定し、以下の関係を見出した。

$$F = k_e \frac{Qq}{r^2} \quad \left(k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right) \tag{10}$$

この関係は、発見者のクーロンに因んでクーロンの法則と呼ばれる。近接作用の考えに基づき、ある場所にある電荷 q に、別の場所にある電荷 Q が作った電界 $\boldsymbol{E}$ が作用したと考え、

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} \equiv \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{11}$$

のように電界が定義されている。この関係を覆す観測事例は無く、法則として定着している。しかし、測定であるから、距離の２乗に反比例する特性が真実がどうかは、測定をいくら精度よく行ってもわからない。もしかしたら、距離の２乗でなく、1.999 乗や 2.001 乗であるかもしれない。法則は経験則であって、証明ができないのであるから、真実は誰も知らないのである。ではなぜ、２乗が法則として残っているのであろうか。

ガウスの発散定理の帰結の一つ(3)式を見てほしい。この式で

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A}_0 \to \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

の対応付けができれば、(11)式になる。この対応付けは、あくまで仮定であって、証明できるものではない。でも、観測結果に合えば法則になる。そう言う性質のものである。物理現象は数学的な美しさを持つという思想を信じたい。数学的な美しさとは、そう、自然の法則が数学の定理に支配されていると言うことである。具体的には、クーロンの法則がガウスの発散定理（の上記①の帰結）に支えられていれば、この距離特性（$\propto 1/r^2$）が出てくるわけである。そのように、法則は、美しいものになるだろうと言う期待で 2 が選ばれたとしても、嬉しいことに、それでうまくいっているのである。［注:この例やこの後でてくる例においてもそうであるが、法則が、定理の知識をもとにして発見されたと言うわけではない。本章では、法則がこのように定理に支えられていることの後付けの説明を行っていると受け止めてほしい］

3.2　電界に関するガウスの法則

電磁気学では、発散が扱われる物理量は、電界 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$、磁界 $\boldsymbol{H}$ などがあるが、ここでは、代表して、電界 $\boldsymbol{E}$ に関する発散とガウスの法則を調べる。

マクスウェルの方程式の一つに以下の式がある（$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ の場合）。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\rho\text{: 電荷密度 [C/m}^3\text{]}) \tag{13}$$

電界と電荷密度と言う違う物理量の関係を示しており、**電界に関するガウスの法則**と呼ばれる。

ガウスの法則は以下の仮定の下にある。

１）電荷 Q からは Q（本）の電束が生み出されている（ともに単位はC（クーロン））。

２）電界 $\boldsymbol{E}$ は、電荷からの距離の２乗に反比例して弱くなる（クーロンの法則より）

３）複数の電荷、あるいは連続して分布する電荷に対しては、全体の電界は個々の電荷によってつくられる電界の重ね合わせになる。

１）は仮定というよりは、そのように決めたと言う約束事（本数と言っても整数値で表されるものではなく、概念上の）。２）の仮定は、ガウスの発散定理という数学から導かれる性質（2.2項の①の帰結）が物理の世界にも起きているだろうと受け入れた仮定である。この３つの仮定から、電荷密度ρで連続に分布する電荷が作る電界 $\boldsymbol{E}$ について以下の式が導かれる。

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \tag{14}$$

電荷密度ρは、体積積分する領域 V の内外にどう分布していても構わない。なぜなら、V 外に分布するρの(14)式左辺の面積分への寄与は 0 であるからである。この式は電界に関するガウスの法則の積分形の表現である。ガウスの発散定理より、

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV \tag{15}$$

であるので、(14)式と(15)式の体積積分同士の被積分関数を比較して、(13)式の簡潔な微分方程式で表すことができる。

以上を整理すると

<u>ガウスの発散定理（数学的に証明された真理）</u>

・ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ とその発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の積分関係を結び付ける式（式(1)）

・そこから導かれるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ に関する種々の性質：
例えば、球形領域に $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ が均一に分布しているとき、球外では、$\boldsymbol{A}$ の向きは径方向に、大きさは $1/r^2$ に比例。球外の $\boldsymbol{A}$ は球内に均一分布する $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の総量を原点（重心）において求めることができる。

<u>ガウスの法則（発見あるいは類推に基づく経験則）</u>

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ で表される物理量に対して、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を別の物理量 X（スカラー関数）に結びつけ、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=X$ としたときの $\boldsymbol{A}$ と X の積分関係をガウスの発散定理で結びつける。$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=X$ の部分が仮定（経験則）なので、そこから導かれる性質は全て法則。

<u>電界と電荷密度の関係では、</u>

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV$$ （ガウスの発散定理：数学）

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$ （ガウスの法則（積分形）：物理）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ （ガウスの法則（微分形）：物理）

ガウスの法則が、対称形構造物の電界や電束密度を求める際に、極めて便利な計算手法であることは、電磁気学の教科書等に挙げられている例題を見れば明らかである。そして、自然界の物理現象が数学的世界に支えられていることが、感動として実感できるであろう。

ティータイム　幻のキャベンディッシュの法則

電荷の引き合う（あるいは反発する）力が距離に二乗に反比例する性質（逆二乗則）は、クーロンの法則として知られている。それは、クーロンが、1785 年、はじめて世に知らしめたからである。クーロンはねじり天秤により、先ずは、電荷の反発力を詳しく調べて、逆２条の法則にたどり着いた。実は、これより１０年以上も前の 1771 年、この性質を見つけていた人がいた。イギリスのキャベンディッシュ（Henry Cavendish）である。彼のやり方はクーロンとは別の方法であった。導体でつないだ内外の球に電気を与えると、外側だけに集まり、内側の球には無いことがわかった。そうであれば、ニュートンが見出した重力の性質（球の中空部分の重力は 0）と同じで、球外の空間における電気の強さは距離の逆２乗になるはず、と推論した（2.2 節のまとめの①の（ ）の部分）。これを精密に測定し、距離の特性を $d^{-2\pm\delta}$と置いたとき、$\delta < 1/50$ であると算出し、d^{-2} を主張した。それなら、クーロンの法則では無くキャベンディッシュの法則なのでは、と思うであろう。実は、キャベンディッシュは（彼の非社交的な性格から）これを公表せず亡くなってしまい、遺稿の整理を行ったマクスウェルの公表（1879 年）まで、百年を待たなければいけなかったのである。同じ逆二乗則の発見でも、まったく違う発想によるものであったことが興味深い。

４．ストークスの定理

上述したガウスの定理は発散に関するものであったが、ここで述べるストークスの定理は回転に関するものである。発散の概念は、直感的に捉えやすく、理解に誤解を生むことは少ないが、回転の概念はそれより複雑であり、混乱しやすい。

4.1　ストークスの定理とは

ループをなす経路 c で囲まれた任意の曲面 S を考える。ストークスの定理は、曲面 S 上でのベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ に関する積分定理で以下の式で表される。

$$\int_{\mathrm{S}} \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad \text{【ストークスの定理】} \tag{16}$$

先ず、式の意味を考える。

同式の左辺は、曲面 S 上におけるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の回転（＝捩れの力（回転力）；ベクトルの向きは回転軸の方向）の面に垂直な方向の成分を全部集めたもの（＝回転力の総量）である。一方、右辺は、面の縁をなす経路（ループ）c 上でのベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の経路方向成分を経路全体で積分したものであり、ループに働く渦の力（循環とも呼ばれる）である。式の左右に表される量が等しい、という定理である。少し言い方をかえると、面上のいたるところの微小部分に存在する回転が、その外側にそれぞれの渦を作り、その渦が広がって面の縁に現れる渦の全体は、内部の回転の総量に等しくなるである。

ガウスの発散定理の直感的理解のしやすさに比べると、少し分かりにくいように思う。なぜ、分かりにくいか、その理由は２点ある。一点目は、３次元空間の性質であるのに、式は面上や線上の積分になっていて、３次元空間をイメージしにくい。二点目は、ループ c を固定して考えるとき、面 S はループ c を縁とする任意の立体的面形状が許されることについての不思議感である。

電磁気学（あるいはベクトル解析）授業などで、この定理の意味について、以下のような説明が見受けられる。図１(a)で、左側に示す４つの矩形ループがあって図のように回転力がある。この場合に、内部の接合部分は力が打ち消されて消え、残るのは、右側図のように縁の成分のみになる。同図(b)のような一般的な形でも同様なことになり、結局、内部の回転力は縁にのみに現れる、という説明である。この説明を聞いて、なんとなくわかった気分になるが、誤解を招く説明であり、著者は良い説明とは思わない。例えば、$\nabla \times \boldsymbol{A}$ が、ループの中心部分にはあるが、ループの縁付近には無い場合（すなわち外周付近では $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ）、図 1(b)の説明は成立しないからである。同図の説明が有効となるのは、面内に $\nabla \times \boldsymbol{A}$ がほぼ均一に存在するような場合（まさに図に書いたような例）のみで、それは一般的ではない。ストークスの定理の意味するところは、面内の一部に $\nabla \times \boldsymbol{A}$ なるベクトル量が存在すれば、その影響（＝それによって作られた渦）は、周囲に、すなわちループの位置にまで現れるということである。

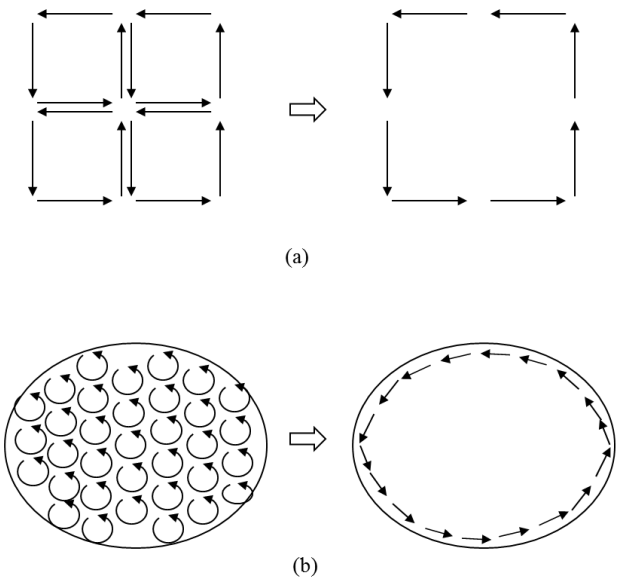


図１　ストークスの定理の直感的説明イメージ図（誤解を与えて良くないという例）

図２に示すように、原点を中心とする半径 a の円形ループ c が有り、この線上での $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めるとしよう。ループ c が作る任意の面 S を代表して、円形平面である S_1 と上部に膨らんだ面 S_2 を考える。図には $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の分布に関する三つのケースを 1～3 として示している。ケース 1 は中心軸上の無限小の細さの中に無限の長さで、$\nabla\times\boldsymbol{A}_0$ が存在する場合である。ケース 2 と 3 は原点を通って一周している場合であり、ケース 2 は S_1, S_2 に対して一回鎖交し、ケース 3 は S_1 に対しては出入り２回の鎖交、S_2 に対しては鎖交がない。いずれの場合も、原点においては $\nabla\times\boldsymbol{A}_0$ が共通であるとしよう。

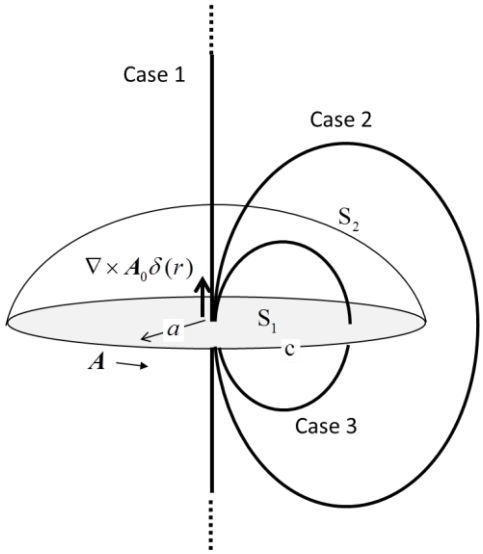


図２　ストークスの定理の説明図

この三つのケースを比較して、次のようなことが言える。

① ケース 1 と 2 の周回積分値は同じである。また、ケース 3 の周回積分値は 0 である。

② ケース 1 の場合は構造の対称性から周上のベクトル関数 A_φは次のように解ける。

$$A_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2\pi a} \nabla \times \boldsymbol{A}_0 \tag{17}$$

これは、ガウスの法則で述べたケース 3 の距離特性（＝(9)式：中心軸からの距離に反比例）と同じになる

③ ケース 2 と 3 の場合は、周回積分値は求められるが、非対称構造ゆえベクトル関数は解けない

④ ベクトル関数$\nabla \times \boldsymbol{A}_0$は連続的につながっていなければならない（→切れ目があってはいけない）。なぜならば、そこに不連続があれば、c で固定された任意の面 S がそこを通るような場合、(16)式の左辺は異なる値を示し、式の等号が成り立たなくなるからである。（ケース 1 の場合も無限遠同士でつながっていると考えることができる。少なくとも切れ目は無い）

ガウスの発散定理は、領域とそれを囲む面との関係であるから、イメージしやすいが、ストークスの定理は①～④から分かるように、線・面・領域の関係が複雑である。これも定理であるから、その正しさは数学的に証明されているが、その証明の詳細は教科書に任せて割愛する（ガウスの発散定理の証明よりは少し手ごわい）。

4.2　２次元問題による直観的な理解

ストークスの定理は、任意の曲面上で成立する定理であるが、平面上での説明の方がイメージしやすいので、以下、それでの説明を行う。（注：以下の説明では *xy* 面上でのベクトル関数を述べるが、対象空間は３次元で *z* 方向には変化がないと言う意味である）

ストークスの定理の(14)式を直角座標成分で書き下すと以下のようになる。

$$\int_S \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{k} \right\} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_c \left(A_x dx + A_y dy + A_z dz \right) \tag{18}$$

曲面上での問題を平面上での問題に置き換えるため、$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\,(=\hat{\boldsymbol{z}})$, A_z=0 とする。この時、上式は以下のように簡単になる。

$$\int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy = \oint_c \left(A_x dx + A_y dy \right) \tag{19}$$

平面では曲面に対して以下の対応になる。

$$\nabla \times \boldsymbol{A} \;\rightarrow\; \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad dS \;\rightarrow\; dxdy \tag{20}$$

この関係式（ストークスの定理を平面に適用した(19)式）は、グリーンの定理と呼ばれている。この平面に適用したストークスの定理（すなわちグリーンの定理）で、その意味を考えてみたい。

図３において、中心部に円形微小領域ΔSがある。この微小領域内に、単位面積当たり$\nabla\times\boldsymbol{A}_0$のベクトル関数が均一に存在するとする。図では、回転が存在する部分を渦の絵で書いているが、ベクトル$\nabla\times\boldsymbol{A}_0$の向きは紙面に対して垂直（手前方向：$\hat{\boldsymbol{z}}$）である。この$\Delta S$にあるベクトル関数は、$\Delta S$外（半径$r$の地点）に以下のベクトル関数$\boldsymbol{A}$を作る。

$$2\pi r A_\varphi = \left(\nabla\times\boldsymbol{A}_0\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\right)\Delta S \;\rightarrow\; \boldsymbol{A}(r) = \frac{1}{2\pi r}\left(\nabla\times\boldsymbol{A}_0\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\right)\Delta S\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{21}$$

このようにして、周方向に成分を持つベクトル関数$\boldsymbol{A}$が作られ、微小領域の中心からの距離rに対して反比例する。このとき、このベクトル$\boldsymbol{A}$の回転は0である。これは非常に勘違いされやすいところと思うが、なぜなら、円筒座標表現（式(3b)）で

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) = 0 \qquad (\Delta S\text{外の領域}) \tag{22}$$

であるからである。バームクーヘン状にできる渦状のベクトル$\boldsymbol{A}$で、かつ、強さがrに反比例するものには、渦はあっても回転（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）が無いのである。

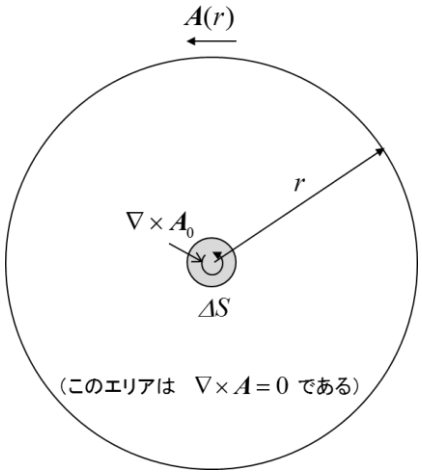


図３　円の中心のΔS内に回転成分がある場合（平面に適用したストークスの定理）

上記例を踏まえ、回転はどのような空間に存在するのかを平面のストークスの定理（＝グリーンの定理）で考えてみたい。

回転$\nabla\times\boldsymbol{A}$に対応する量は(20)式より、

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\ \rightarrow\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

である。このうち、$\partial A_y/\partial x$ は x 方向に対してベクトル $\boldsymbol{A}$ が反時計方向に回転しようとする空間微分係数、$\partial A_x/\partial y$ は y 方向に対して時計方向に回転しようとする空間微分係数であり、この二つが等しいとき、作用が打ち消し合って回転は生まれない。すなわち、

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial y}\ \rightarrow\ \nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0} \tag{23}$$

である。ここでは、回転がある最も簡易な例として、

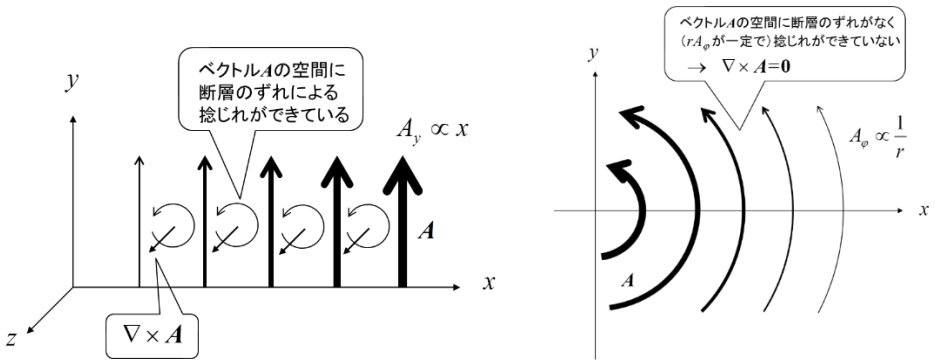
$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=C,\quad A_x=0\ \rightarrow\ A_y=Cx,\quad \nabla\times\boldsymbol{A}=C\hat{\boldsymbol{z}}$$

とすると、図４(a)のように、y 軸方向に断層のズレがあってストレスをもつ空間であり、これが、反時計方向（回転軸の向きは z 軸方向）に回転を生み出しているわけである。

次に、回転を生み出さないケースを調べてみよう。ここでは、円筒座標のφ方向（周方向）の成分 A_φのみをもち、径方向 r の関数で表されるベクトル空間を考える。平面のストークスの定理を円筒座標で表し、$\nabla\times\boldsymbol{A}$ の z 成分=0 とすると、

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)-\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\right)=0\ \rightarrow\ A_\varphi\propto\frac{1}{r}\qquad\left(\because\ A_z=0\right)$$

となる。図４(b)に示すようなベクトルの周方向成分の強度が r に反比例する物理量は電磁気学にもよく現れるが、このケースでのみ回転が 0 となる。図３のΔS 外の部分は、まさにこのケースであったわけである。



(a) 回転がある空間（$\nabla\times\boldsymbol{A}\neq0$）　　(b) 回転が無い空間（$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$）

図４　回転はどのような空間に存在するか

５．ストークスの定理が支える電磁気学の法則

5.1　アンペアの法則

磁界は電流から生まれると言う性質をもち、この関係を定式化したのが**アンペアの法則**である。間隔 r の並行２線に流れる電流 I_1, I_2 間の長さ l あたりの力 F は、以下の式で表される。

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \tag{24}$$

これは磁気力あるいはアンペアの力と呼ばれる。クーロンの法則のときの議論と同様、この式も測定値に基づく経験式なのであるから、距離に反比例するかどうかの真実はわからない。この場合も、本当は距離の 1.001 乗、あるいは、0.999 乗かもしれない。1 にしているのは、ストークスの定理からの帰結である(3.21)式の $1/r$ 特性がここに現れているのではないかと期待できるためである。これを受け入れることによって、アンペアの法則として導かれている式が得られる。磁界 $\boldsymbol{H}$ で表すと、

$$\int_S \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \oint_c \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (\boldsymbol{i}:\ \text{電流密度}\ [\mathrm{A/m^2}]) \tag{25}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{26}$$

である。式(25)の形は、経路 c における磁界の周方向の積分は c を縁とする任意の面 S を貫く電流の総量に等しいと言う性質のため、周回積分の法則とも呼ばれる。(16)式のストークスの定理において、$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{H}$, $\nabla\times\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{i}$ と対応付けた形である。この対応付けは、観測によって見出したものであり、ゆえに法則（アンペアの法則、周回積分の法則）なのである。

円筒座標において、中心軸 r=0 に電流 I が流れている場合には、(26)式は以下のようになる。

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = I\delta(r)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{27}$$

このとき、半径 r の円上では、(25)式は以下のようなお馴染みの式になる。

$$I = 2\pi r H_\varphi \quad\rightarrow\quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \tag{28}$$

無限直線状に流れる電流の存在が、距離に逆比例する形で影響が及んでいると言うのが、アンペアの法則の主要帰結であり、かつ、ストークの定理から導かれる帰結でもある。ガウスの法則と同様に自然界が美しい法則に支配されている（＝数学の世界が自然界の法則に現われている）ことを喜びたい。

5.2　変位電流（アンペア・マクスウェルの法則）

変位電流はストークスの定理、すなわち、数学が求めているものであり、それが、アンペアの法則を拡張したアンペア・マクスウェルの法則となっている。

ストークスの定理では、4.1 項の最後の④にまとめているように、

「閉ループ c 上でのベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の経路方向成分の線積分は、閉ループ c で囲まれる面 S 上での $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の面積分に等しい。この面 S は閉ループ c 固定のもとでどのように選んでも良い。そのためには、$\nabla\times\boldsymbol{A}$ には不連続となる切れ目があってはいけない」
と言う性質である。

これを、アンペアの法則(25)式で見てみよう。図５はこの説明図である。図はコンデンサを介した線路であり、この導線部分に電流 I が流れている。導線の外側に円形の閉ループ c をとり、ループ c で囲まれる平面を S_1 とする。この S_1 を貫く形で電流が流れており、アンペアの法則から式(28)のように磁界が定まる。この面を S_2 のように、コンデンサの電極間を通るように変えても、線積分においては関係ないことであり、線積分値が変わることは無い。しかし、S_2 面には電流 I は流れておらず、 (25) 式右辺の面積分値は 0 になってしまう。そうなれば、等式で結ばれている左辺も 0 にしなければいけないが、それでは、「線積分値が変わることは無い」ことに対して矛盾である。そこでマクスウェルはこの矛盾を解消するために、ここにも電流が同じように流れていると考えたのである。実際の電荷の流れ（伝導電流）は無くても、コンデンサへの電流の流れ込みによって電極間の電束密度 $\boldsymbol{D}$ は時間変化しているのだから、この時間微分値を電流（密度）と考えよう、として変位電流を導入したのである。新しい形の電流を発見したといっても良いかもしれない。このようにして得た変位電流が電磁気学構築パズルの最後のピースとなったのである。得られた式は次式である。

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}_d\ ,\qquad \boldsymbol{i}_d=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{29}$$

ここで、$\boldsymbol{i}_d$ は変位電流の密度 [A/m^2]である。数学が物理法則の発見を助けたと言う事例になる。

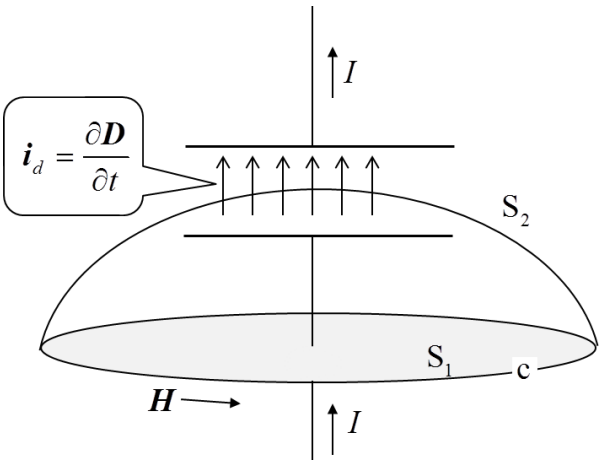


図５　コンデンサの電極間に流れる変位電流

5.3　保存場

空間に電界という電気的歪の場があるが、**電位**と言う別の物理量で満たされる場もある。電位はスカラー量であり、**スカラーポテンシャル**とも呼ばれる。文字は V あるいは ϕ が使われる。単位はボルト[V]である。電位 ϕ は電界（ただし、時間的に変化しない静電界）$\boldsymbol{E}$ と以下の関係で結ばれる。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{30}$$

すなわち、電界は電位の勾配（空間微分、傾き）になる。２点 P_1 と P_2 の電位をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とするとき、電位の差（電位差）ϕ_{21} は以下の線積分で表される。

$$\phi_{21} = -\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \phi_2 - \phi_1 \tag{31}$$

電荷 q を P_1 から P_2 に運ぶとき、電界によって力を受けるので、エネルギー（仕事）が必要になり、その大きさ U_{21} [J]は

$$U_{21} = -q\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \;\rightarrow\; \phi_{21} = \frac{U_{21}}{q} \tag{32}$$

右側の式より、電位差 ϕ_{21} は電界がある環境において 1 クーロン当たりの仕事を表す量であることが分かる。この意味で、ポテンシャル（磁界の説明に出てくるベクトルポテンシャルと区別して、スカラーポテンシャル）と言う言葉が使われている。

点電荷に対して距離 r にある点での電位は、無限遠方の電位を 0 とし、次式となる。

$$\phi = -\int_{\infty}^{r} E_r dr \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{33}$$

電位も重ね合わせの理が成立しており、複数の点電荷が有る場合には、個々の電位の和（スカラー量の和）となる。

(31)式は線積分が積分経路によらないことを示しているが、そのことはストークスの定理で確認できる。電界と磁界の関係は電磁誘導の式で表されるが、電界も磁界も静的である場合には、$\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ である。ストークスの定理より、

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \;\rightarrow\; \oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \;\rightarrow\; \underset{\text{(variable route)}}{\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}} + \underset{\text{(fixed route)}}{\int_{\mathrm{P}_2}^{\mathrm{P}_1} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\left(\equiv\phi_0\right)} = 0 \;\rightarrow\; \underset{\text{(variable route)}}{\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}} = \text{constant}$$

となり、最後の式より、電界の線積分は積分経路に依存しないこと、すなわち、P_1 と P_2 の２点の電位のみで定まることが分かる。このような性質のある場を**保存場**と呼ぶ。電位の勾配で表される静電界がそれである。

６．ガウスの発散定理とストークスの定理のアナロジー

ガウスの発散定理とストークスの定理をそれぞれに述べてきたが、ここではその類似性（アナロジー）について述べる。ガウスの発散定理は体積内の発散（湧き出し）とその閉曲面からの流出（流束）の関係を、ストークスの定理では面内の回転（捻じれのストレス）とその閉曲線上での渦（循環）の関係を扱っており、次元が異なる。両定理の共通の土俵は図６に示す円筒座標の中心軸上に、同図(a)の発散定理ではスカラー量$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ が、(b)のストークスの定理ではベクトル量$\nabla\times\boldsymbol{A}$が無限に連続する形である。発散定理では単位長さあたりの量を$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ に、ストークスの定理では中心軸に$\nabla\times\boldsymbol{A}\,\delta(r)$があるとしている。

円柱より外側の空間において、円柱を中心とする半径 r の平面を考える。ガウスの発散定理により、円周上では径方向を向くベクトル $\boldsymbol{A}$（その成分を A_r）が、ストークスの定理では、円周方向に向くベクトル$\boldsymbol{A}$（その成分を A_φ）が存在する。それぞれの大きさは次式である。

$$A_r = \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{2\pi r} \tag{34a}$$

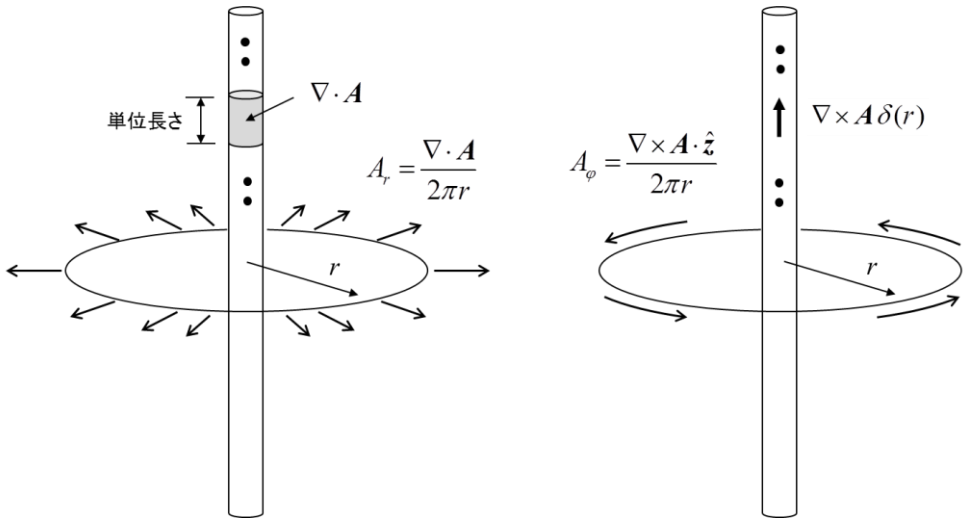
$$A_\varphi = \frac{\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}}{2\pi r} \tag{34b}$$

両式より、ベクトルの方向が異なるものの、式の形が類似であり、背景にある考え方の共通性が理解できる。ここまでは、定理の比較なので数学の話であったが、電場においては $\boldsymbol{A}$ が電束密度 $\boldsymbol{D}$ に、磁場においては磁界 $\boldsymbol{H}$ に対応する。その上で、別の物理量である線電荷密度λ [C/m]、線電流 I について

$$D_r = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \left(\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{D},\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}\to\lambda\right) \tag{35a}$$

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad \left(\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{H},\ \nabla\times\boldsymbol{A}\to I\delta(r)\hat{\boldsymbol{z}}\right) \tag{35b}$$

と対応付けができる。繰り返し述べてきたように、(34)式は数学であるが、(35)式は数学ではなく物理法則である。数学（定理）と物理（法則）の密接な関連性が見えてきたと思う。



(a) ガウスの発散定理　　(b) ストークスの定理

図 3.6　円筒座標で見る二つの定理の類似性