

電波工学視点から最小作用の原理を考える

科学の神髄を分かり易く語ってくれるファインマン物理学教科書、その電磁気学の巻の最後におまけ（特別講義）の章がついている[1]。『私がハイスクールのとき物理の先生, Bader 先生, があるとき物理の講義のあとで私をよんで言った。“君は退屈しているようだ、少し面白い話をしてやろう” 先生は少し話してくれたがそれは私にとって全く魅力的であって、それ以来ずっと魅力を感じている。・・・』で始まる話。そのテーマ“**最小作用の原理**”を力学や電磁気学の例を使って熱く語ってくれている。“自然は「作用」の最小のものを選ぶ”、ということなのだろうか。

最小作用の原理の起源は“フェルマーの原理：光は距離が最短になる経路を進む”であり、光は直進するという結論を導く。このように、“ある量が、ある固定された範囲で、取り得る値の中の最小値（あるいは極小値・停留値）を選ぶように動作する”という仕組みが最小作用の原理である。この最小作用の原理、現代物理学のあらゆる分野（ニュートン力学、相対性理論、熱力学、電磁気学、量子力学など）に通底する基本原理になっている。

例えば、ニュートン力学、質量 m の物体は、加速度 a の空間において ma の力 F を受けて動く。加速度 a は空間位置 x の 2 階時間微分値なので、運動方程式 $F=ma$ は 2 階微分方程式である。この方程式に従って物体の動きを追跡してゆけば、例えば、時刻 t_1 から t_2 までの動きの全貌がわかる。最小作用の原理は、この動作を以下のように説明する。

始点と終点の位置と時間を固定する。わかりやすいように x 軸上を動く 1 次元で考え、始点(x_1, t_1)、終点(x_2, t_2)とする。区間中の位置 x は時間の関数となり $x=f(t)$ としよう。これはどのようにして決まるか。ここで、座標位置 x やその時間微分値 $\dot{x}$ の関数で表されるあるスカラー値 $L(t)$ に着目する。その時間積分値 S を次式に取る。

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\{x(t), \dot{x}(t)\} dt$$

S は関数の関数なので**汎関数**である。この値が $f(t)$ のあらゆる変化に対して最小値（正確には停留値あるいは極小値）となるよう質点が動く。あらゆる道を嗅ぎ分けてとるべき道を選ぶというイメージである。最適な $f(t)$ を選ぶ鍵は**オイラー・ラグランジュ方程式**によって与えられる。式だけ書くと以下である（一般式は任意の座標系で、かつ、多次元である。ここでは 1 変数 x のみ）。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ここで述べたスカラー量 L には**ラグランジアン** (Lagrangian)、 S には**作用** (action) という名前がついている。最小作用の原理の「作用」はこの意味である。ニュートン力学ではこのラグ

ンジアンは

$$L = K - U \quad (K: \text{運動エネルギー}, \quad U: \text{ポテンシャルエネルギー})$$

で与えられる。この意味は何かとあまり追求しない方が良さらしい。 $F=ma$ を導く量と理解するだけでよいそうである。

ニュートン力学の入り口問題、鉛直投射問題で見てみよう。

【問題】質量 m の物体を $t=0$ で、鉛直方向 (x 軸方向) に高さ h から初速度 v_0 で投げたところ、 $t=t_0$ 後に $x=0$ の地点を通過した。 x 軸の負方向に向く重力加速度 g があるとする。この軌道 x を時間の関数で求めよ。

運動方程式から

$$F_x = -mg$$

$$F_x = \frac{d(mv)}{dt} = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = -g$$

であり、2階微分方程式を解き、2点での条件より二つの積分定数を定めると、求める式は次式となる。

$$x(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \left(v_0 = \frac{1}{2} g t_0 - \frac{h}{t_0} \right)$$

最小作用の原理から

$$L = K - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx$$

オイラー・ラグランジュ方程式より、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow m\ddot{x} + mg = 0 \rightarrow \ddot{x} = -g$$

なんと、結局、ニュートンの運動方程式が出てきて、ここから先は、上記と同じである。(ラグランジアンをそうなるように決めたのだから運動方程式が出てくるのは当たり前なのだが、ここでは、そういうラグランジアンが存在するということに意味がある)。

最小作用の原理を適用することの利点は、ラグランジアンの形が定まりさえすれば、振り子の問題でも、ばねの問題 (位置エネルギーを $(1/2)kx^2$ とする) でも、同じようにして解けるということにある。

実際には、座標系の取り方も、次元数も自由であり、より複雑な問題への適用が可能である (詳

しくは、[2]等の解析力学の教科書、あるいはネットに公開されているユーチューブ教材が多数あり、それらで学んでほしい)。解析力学は変分法を拡張し体系化したものである。1788年、ラグランジュによって骨組みが完成し、力学が数学の一分野に組み込まれた。解析力学は要所に現れる様々な定理への理解や高度な数式展開があって、学ぶのに苦労する学問である。どのくらい難しいかは以下の逸話で判断してほしい[3]。ラグランジュの時代より一世紀前の1696年、ヨハン・ベルヌーイとライプニッツは次のような問いを出してヨーロッパの数学者に挑戦した。「垂直面上に任意の2点をとったとする。一つの質点が重力の影響のもとに摩擦なく最小時間で上部から下部に滑り落ちる曲線の形はどのようなものか」と。最速降下線の問題（答えはサイクロイド）である。大陸の数学者たちは半年かかっても解けなかったが、この話を伝え聞いたニュートンは一晩で解き、匿名で解答を送ったと言う。それを受け取ったベルヌーイは「ああ、ライオンはその爪からも知れる」と叫んだそうである。

電磁気学のマクスウェルの方程式にも対応するラグランジアンがある。この場合は、電磁場という場の性質であるため、ニュートン力学のラグランジアンがエネルギーの次元であったものに対してエネルギー密度の次元で表される量 $\mathcal{L}$ になり、**ラグランジアン密度**と呼ばれる。電界 $\mathbf{E}$ と磁界（磁束密度） $\mathbf{B}$ 、電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ ）、電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{i}$ を用いて以下の式で与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) - \rho \phi + \mathbf{i} \cdot \mathbf{A}$$

この式にオイラー・ラグランジュの方程式を用いて作用 S の停留条件（最小）を求めるとマクスウェルの方程式が得られる。実際の導出手順は、解析力学の教科書（例えば[2]の11.3節）を見てほしい。これだけの説明だと、なるほど、電磁気学も最小作用の原理に従っているかと思うだけになってしまうが、電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{B}$ について、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

と全て電磁ポテンシャルに置き換え、素粒子間の相互作用と組み合わせたラグランジアンに拡張してゆくと、量子力学や相対性理論を含んだ現代物理学（ゲージ場と呼ばれる世界）に通底する原理であることが理解できる。（式の書き方もアインシュタインの縮約記号が用いられ、ローレンツ変換やゲージ変換に対する不変性が一目でわかるらしいが、筆者にはそれを語る力量はない）。

最小作用の原理から、以下の二つのことが読み取れる。

- 1) 様々な可能性のある動作に対して、現実の解は、動作の全体から導かれる“作用”の最小値が選ばれる。
- 2) 大局的なものの捉え方である最小作用の原理と、局所的な捉え方をする（通常、微分方程式で表される）法則とは、現象の振る舞いに対して同じ結論を導く。全体としての最適動作は、

それを構成する部分部分においても最適な動作をしているということである。法則はそれぞれの力学分野において個別に与えられるが、最小作用の原理は、現代物理学に通底する基本的な考え方になっている。

最小作用の原理と個別の法則、どちらの考え方が良いか、あるいは、具体的な問題に対してどの手法を採るか、という議論ではない（＝どちら側から見るかの違いであって優劣の議論ではない）。個々の法則の発見で始まり、それらに共通するものとして最小作用の原理が見いだされたという歴史になる。以下、上記 1) 文末の“選ばれる”の意味を電波伝搬の例で考えてみたい。

図 1(a)に示すように、送信点 T と受信点 R に十分な距離をとって送信アンテナと受信アンテナが対向している。それぞれのアンテナは空間に対して一様に電波を放射する（または受け止める）無指向性アンテナであるとしよう。送受信点を結ぶ電波の通り道は、最小作用の原理により直線となり、マクスウェルの方程式もそれをサポートしている。自然はなぜこの経路を選んだのであろうか。同図には以下で説明するフレネルゾーンも描いている。

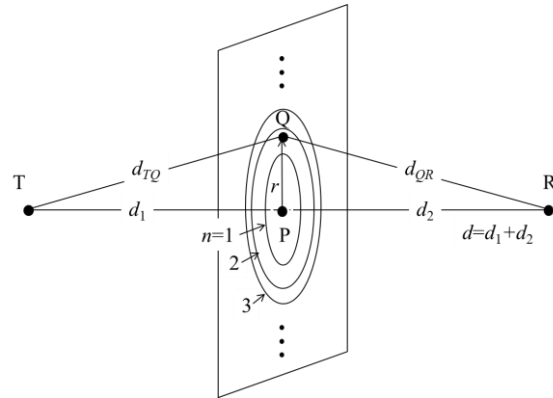
送受信点を結ぶ線上の点 P を通る垂直な平面を考え、この平面上に点 Q を置く。TR 間距離を d 、TP 間距離 d_1 、PR 間距離 d_2 、TQ 間距離 d_{TQ} 、QR 間距離 d_{QR} と置く。この平面上の点 Q が、

$$d_{TQ} + d_{QR} = d + \frac{n\lambda}{2}$$

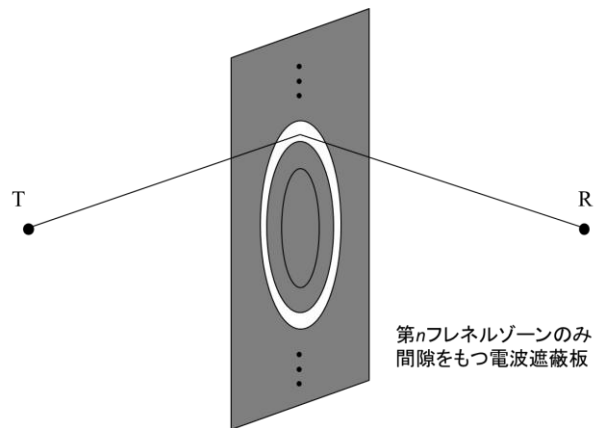
を満足するとき、平面上に n をパラメータとして、半径 $r(n)$ の円が書ける。ここで、 λ は電波の波長である。このとき、 n を自然数として、 $r(n-1)$ と $r(n)$ で囲まれる円環部を第 n フレネルゾーンと呼ぶ。その半径は、 $r \ll d_1, d_2$ の条件のもとで、

$$r(n) = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d}} \quad \left(d_1 = d_2 = \frac{d}{2} \right) \rightarrow r(n) = \sqrt{\frac{n\lambda d}{4}}$$

となる。ほぼ同位相で到達する第 1 フレネルゾーン内の電波が受信点へのエネルギーの大部分を運んでいる。電波は直進すると言ってもよい経路である。実は同じように他のフレネルゾーンからも電波は到来しているのであるが、それらは、位相が異なる他のゾーンからの電波同士で打ち消しあい、結局、生き残るのは第 1 フレネルゾーン内の電波という描像になる。第 1 フレネルゾーン以外からも電波が来ていることは、同図(b)のように、一つのフレネルゾーンのみに間隙がある遮蔽板を置けば、そのゾーンからくる電波が回折波として受信できる。光の場合はあまりにも波長が短いので、光線が一直線にしか見えないが、波長が長い電波では、その広がりを実感できる。可能性のある経路のすべてから電波は到来するが、直線コース（第 1 フレネルゾーン）以外は打ち消されて見えなくなっているというだけである。あらゆる経路が最初から排除されるわけではないが、位相がそろったコースをたどったものが結果として生き残り、その生き残ったものだけに着目すれば、それが選ばれたように見えて最小作用の原理になるのである。筆者の



(a) 見通し回線とフレネルゾーン



(b) 一つのフレネルゾーンのみに関隙がある遮蔽板を置いた場合

図1 自由空間における電波伝搬

専門ではないのでよくわからないが、素粒子の存在位置が確率で表される量子力学の世界では、まさにそういうことが起きているようである（ファインマンの電磁気学[1]（の補講）参照）。

最小作用の原理は以下のようにまとめられる（文中の《 》は図1の例に当てはめた場合）。

- ① 可能性のある経路の全部が使われる《全フレネル領域から電波は到来している》
- ② そのうち、位相がそろったもの（＝停留状態にあるもの）だけが積算されて残り、他のものはお互いに打ち消しあい結果として生き残れない《第一フレネル領域からの電波のみが生き残る》
- ③ 大局的に見れば、停留状態にあるもののみが現実の動作を担っている《電波は最短距離を進む》

ここで読者の皆さんに一つのパラドックスを。図2のように、第一フレネルゾーン以外のある一つのフレネルゾーン（の一部）のみを通過するような鋭い指向性を持ち、かつ、受信点方向にはヌル（利得0）となる送信アンテナがあったとする。図1(b)のような遮蔽板を置けば、電波の

通り抜けという意味では同じなのであるから、図 1 (b) で説明したように電波受信ができるであろう。この後、この遮蔽板を取り外しても、そこを通り抜けているだけだったので、電波に与える影響はなく、図 1 (b) の時と同じと思うであろう。しかし、送信アンテナには受信点方向には利得が 0 なので、電波は来ないはずである。受信できるのかできないのか、皆さんはどう考えますか。フリスの伝達公式から、できないのが正解そうに見えるが、では、できるという推論（あるいは問題設定）のどこがおかしいのだろうか。

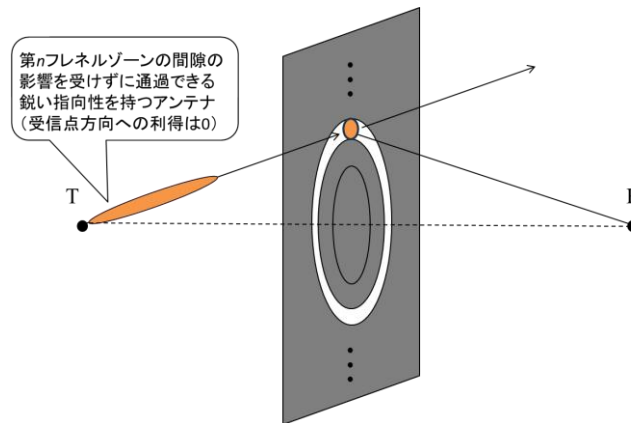


図2 一つのフレネルゾーンを通過する共ビーム送信アンテナの場合

参考文献

- [1] ファインマン, レイトン, サンズ (宮島龍興訳), ファインマン物理学 III 電磁気学, 岩波書店, 1969.
(引用部分: 補章 最小作用の原理 pp. 275-290.)
- [2] 渡辺悠樹, 解析力学, 共立出版, 2024.
- [3] E. T. ベル (田中勇, 銀林浩訳), 数学を作った人びと (1), 東京図書, 1962. (引用部分: 第 6 章 ニュートン, pp. 161-162.)

本レポートは、ネット公開私製本「[謎解き電磁気学](#)」のおまけの章に加えています。