Technical Report YK-090-rev
July 10, 2026
Y. Karasawa

多変量正規分布とその仲間たち
～電波伝搬モデル視点での系統的整理～

電波伝搬モデルの中に現れる様々な確率分布の中で、多変量正規分布に源を置く分布を系統的に整理する。その分布がどのような意味を持つか、分布式がどのように導かれるかを丁寧にまとめている。調べたい分布を表 1 から見つけてそこだけ見ても分かるように、項目毎に自己完結するようなまとめ方（＝辞書的なまとめ方）をしている。（注：初期公開版に対して、章構成を含めて大幅な改訂をしている）

１．本レポートの特徴

本レポートは多変量正規分布を源として、そこから生まれる様々な確率分布を取り上げる。特徴は以下の 3 点である。

１）多変量正規分布を原点として、それぞれの分布の関係がわかる
２）各分布の意味を電波伝搬モデル視点から眺める（振幅変動・電力変動・ダイバーシチ合成・マルチクラスタモデル）
３）数式の導出を丁寧に行う

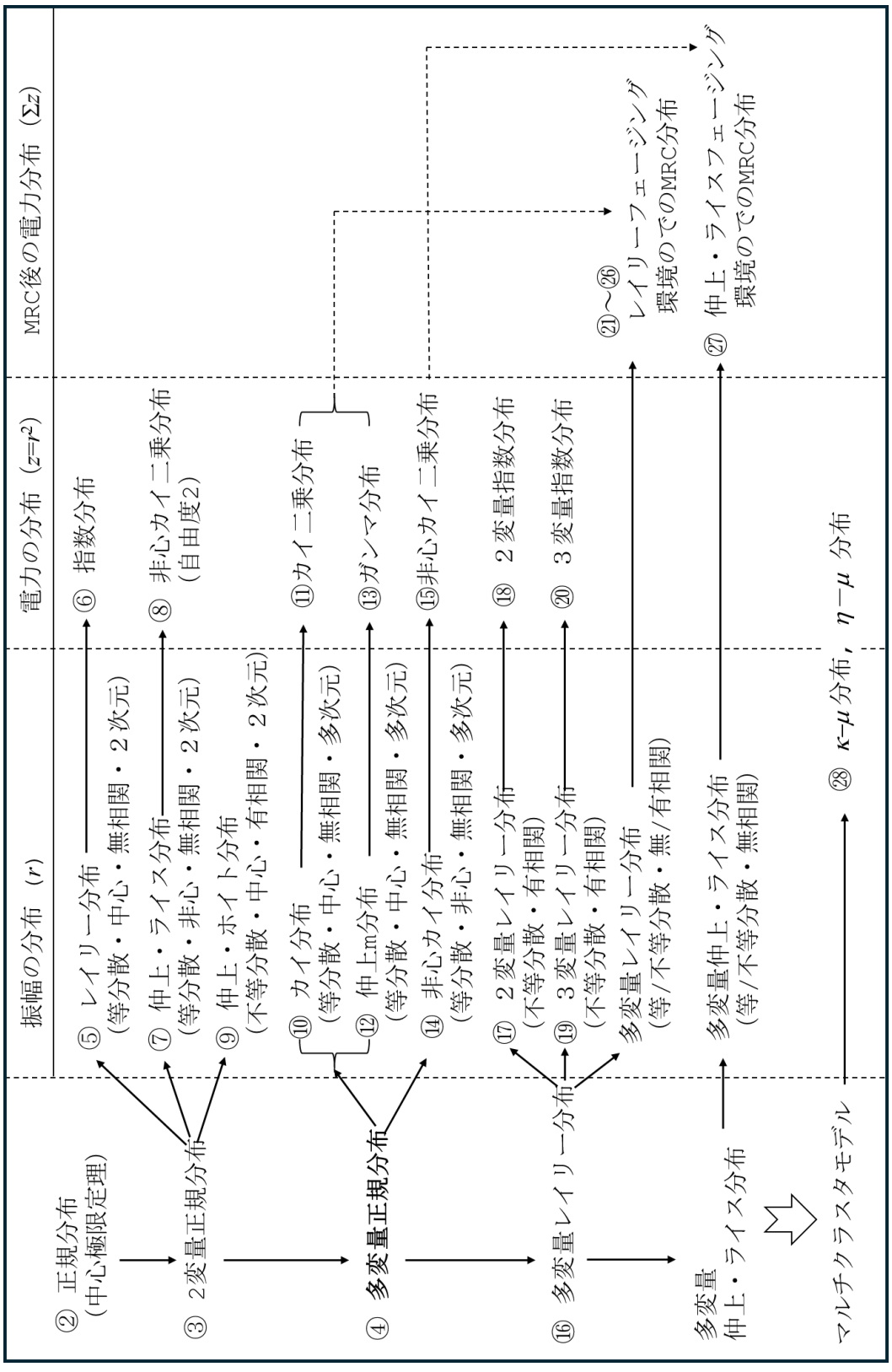
無線通信、特に電波伝搬のモデルに使われる確率分布は、利用目的が限定される特殊性があって、確率・統計の一般的な書籍に取り上げられることがない分布も多い。筆者は電波伝搬の専門書[1], [2]や確率分布をまとめたネット公開私製本[3]の中で、極力それらを取り上げて解説してきたが、多変量正規分布を出発点にすると見通しのよい系統的な整理ができることに気が付いた。源流に近い基本分布には仲上稔が編み出した三つの分布（n・m・q 分布）があり、現代の潮流であるマルチクラスタモデルまで下記に示す一つの型(分布の核)のもと連綿とつながっている。

$$f\left(x\right) \propto x^{a} \exp\left(-bx^{c}\right) I_{d}\left(ex^{f}\right) \qquad ①$$

I_d は d 次の変形ベッセル関数、a～f は分布のパラメータである。本レポートでは上記の核を有する分布を取り上げ解説する。これらの分布と多変量正規分布との関係を表 1 にまとめている。電波伝搬に現れる確率分布は様々な系統を持っていて、これが全てだと言うわけではないので、[1]～[3]などと合わせて学んでほしい。また、確率分布の変数変換や特性関数など、確率に関する基本的なことは[3]（の第２章）にまとめており、その部分の理解を前提にしている。

なお、確率統計学分野の慣例に従い、確率変数の表記についてはアルファベット大文字で、実現値や分布式の変数には小文字を当てている。原則として座標軸に対応する変数には X や Y を、そのノルム（電波信号の振幅）には R を、ノルムの二乗（電力や SN 比）には Z を用いている。

表１　本レポートで取り上げる多変量正規分布とその仲間たち



２．多変量正規分布

2.1 正規分布（②）

本レポートは多変量正規分布を出発点とするが、さらにその上流に**正規分布**があり、確率密度関数は以下の形で表される。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\equiv N(\mu,\sigma^2) \qquad ②$$

$$\left(\mu=\langle X\rangle:\text{平均},\ \ \sigma^2=\left\langle(X-\mu)^2\right\rangle:\text{分散}\right)$$

正規分布を $N(\mu,\ \sigma^2)$と略記する。$N(0,\ 1)$は**標準正規分布**と呼ばれる。独立で同一分布（i.i.d.）に従う確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$があって、$X=(X_1+X_2+\ \ldots\ +X_N)/N$ の分布を求めるとき、N が十分大きい場合には、一つの分布に収斂し、それが正規分布である。元の分布は特殊なもの（平均や分散を持たないコーシー分布など）を除いた大部分の分布に適用できる。これを**中心極限定理**という（証明は[3]の 3.1.2 節など)。厳密に同一分布でなくても、似たような同程度のものがたくさん集まる現象は正規分布が良い近似になる。故に、正規分布は**加法性確率過程**における基本分布である。この後見てゆくように、無線通信の電波伝搬では多数の反射波が集まる環境が多く、正規分布が伝搬モデルの根底を支えている。

2.2 二変量正規分布（③）

本レポートの主役は多変量正規分布であるが､そのもっとも簡単なケースである **2 変量正規分布**から始めてみよう。2 変量正規分布は二つの変数 X_1 と X_2 がそれぞれ正規分布し。かつ、X_1 と X_2 に相関があって、相関係数ρで関係づけられるものである。この 2 変量正規分布の同時確率密度関数（joint probability density function: JPDF）は以下の形で与えられる。

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] \qquad ③$$

一般の教科書では、先に多変量正規分布（変量数 N）を学び、N=2 とすればこの形になると、説明されることが多い。しかし、このレポートはそういうことをしない。N=2 は多変量正規分布の中で最も簡単なケースなのだから、これに特化して求めれば、有相関確率分布の考え方もわかるであろうと思うからである。以下、③を導いてみよう。

X_1 と X_2 の確率分布（確率密度関数（PDF））を $f_1(x)=N(\mu_1,\ \sigma_1^2), f_2(x)=N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$とする。$X_1$ と X_2 が相関係数ρで結ばれるとは次の関係を言う。

$$\rho = \frac{\left\langle \left(X_1 - \mu_1\right)\left(X_2 - \mu_2\right)\right\rangle}{\sigma_1 \sigma_2}$$

おたがいに独立な二つの標準正規分布（$N(0,1)$）変数 U_1, U_2 を用い、確率変数 X_1 と X_2 が以下の関係で結ばれているとしよう。

$$X_1 - \mu_1 = \sigma_1 U_1, \quad X_2 - \mu_2 = \sigma_2\left(\rho U_1 + \sqrt{1-\rho^2}U_2\right)$$

この関係が上述の相関係数式を満たすことを確認してほしい。（注：相関係数ρを与える X_1, X_2 と U_1, U_2 の関係は、これが唯一ではない。例えば、次章④式の導出には、対称性の良い別の与え方をしている。）

ここで、確率の公式

$$f\left(x_1, x_2\right) = f_1(x_1 \mid x_2) f_2(x_2) = f_2(x_2 \mid x_1) f_1(x_1)$$

を使う。式中の $f_1(x_1 \mid x_2)$ は X_2=x_2 に値を固定した状態での X_1 の確率分布であり、**条件付確率分布**と呼ばれる。ここでは、$f_2(x_2 \mid x_1)$ に着目する。また、以下の式表現を見やすくするため、

$$X_1' = X_1 - \mu_1, \quad X_2' = X_2 - \mu_2$$

として、しばらく、変数を X_1', X_2'で進めてゆく（分布表現も $f_1 \rightarrow f_1'$, $f_2 \rightarrow f_2'$）。X_1'=x_1'に値を固定すると X_2'は以下の式で表される。

$$X_2' = \sigma_2\left(\rho u_1 + \sqrt{1-\rho^2}U_2\right) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho x_1' + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}U_2 \quad \left(\because u_1 = \frac{x_1'}{\sigma_1}\right)$$

このとき、X_2'は正規分布であり、かつ、平均と分散が

$$\left\langle X_2' \right\rangle = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho x', \quad \left\langle X_2'^2 \right\rangle = \sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$$

なので、条件付確率 $f_2'(x_2' \mid x_1')$ は次式で表される。

$$f_2'\left(x_2' \mid x_1'\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{\left(x_2' - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho x_1'\right)^2}{2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)} \right\}$$

求めたい同時確率分布は

$$f'\left(x_1', x_2'\right) = f_2'(x_2' \mid x_1') f_1'(x_1')$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(x_2' - \dfrac{\sigma_1}{\sigma_1}\rho x_1' \right)^2}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)} + \frac{x_1'^2}{\sigma_1^2} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)} \left(\frac{x_1'^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x_1'x_2'}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2'^2}{\sigma_2^2} \right) \right\}$$

となる。上式を x_1'→ x_1-μ_1, x_2'→ x_2-μ_2 に置き戻せば、③式を得る。２変量と言えども、導出にはそれなりの手数が必要であることが理解できたと思う。

練習問題として

$$f_1\left(x_1\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2\right) dx_2$$

となることを確かめてみるとよい。確率分布 $f_1(x)$は、同時確率分布 $f(x_1,x_2)$の変数 X_1 についての**周辺確率分布**と呼ばれる。

2.3 多変量正規分布（④）

多変量正規分布の確率密度関数は次式で与えられる。変量の数を N、共分散行列（あるいは相関行列とも呼ばれる）をΣとしている。

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{N/2}\left|\Sigma\right|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right) \right\} \qquad ④$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_N \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_N \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \left\langle \left(X_i - \mu_i\right)^2 \right\rangle = \sigma_i^2$$

$$\Sigma = \left\langle \left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_N\rho_{1N} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N\sigma_1\rho_{N1} & \sigma_N\sigma_2\rho_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad \left(\rho_{ij} = \rho_{ji}\right)$$

以下の手順に従って、この式を導く。先ず、各変数をお互い無相関の標準正規分布に従う確率変数 $U_1, U_2, \cdots, U_N$ を用いて次のように表してみよう。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N_2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\mu}$$

共分散行列Σと係数行列 A が以下の関係になる。

$$\left\langle \left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle = AA^{\mathrm{T}} = \Sigma$$

確率変数 U_1〜U_N の同時確率密度関数 f_U は、お互い無相関なので、個々の分布の積となり、次式である。

$$f_U\left(u_1, u_2, \cdots, u_N\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right)$$

また、

$$\boldsymbol{u} = A^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)$$

なので、式中の $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ の部分が、

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} A^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right) = \left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)$$

であり、上式の右辺で置き換えられる。また、変数 U を変数 X へ変換するときのヤコビアン J は

$$J = \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right| = \left|A^{-1}\right| = \sqrt{\left|\Sigma^{-1}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left|\Sigma\right|}}$$

であるので、求めたかった確率分布は

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right) = \frac{J}{\left(2\pi\right)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right\}$$

となり、上式の J と $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ に先に求めた式を代入すれば、冒頭の④式になる。

④式で N=2 とすれば③式が得られるが、これは練習問題としたい。

以下、④式（N=2 の場合は③式）から生まれる個々の確率分布の式へ進んでゆく。

３．二変量正規分布のノルムとその二乗値の分布

ここでは、２変量正規分布から生まれる分布を扱う。２変量を平面上の x 軸と y 軸の値に対応させれば、物理空間での量になる。また、複素数で表現されるベースバンド信号のように実数（I 軸）と虚数（Q 軸）に対応させれば、信号空間の量になる。伝搬モデルの大部分は後者になる。ここでは、確率変数のノルム R（信号の振幅を表す）とその二乗値 Z（電力や SN 値を表す）に

着目する。

$$R = \|\boldsymbol{X}\| = \sqrt{X^2 + Y^2}\,, \quad Z = R^2$$

3.1 レイリー分布と指数分布（⑤, ⑥）

２変量 X と Y の夫々が平均値 0、分散 σ^2 の正規分布し、かつ無相関とする。**レイリー分布**は２変量分布から生まれる分布の中で最も簡単かつ基本になる分布である。分布式は以下である。

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \qquad ⑤$$

$$X, Y \;\sim\; N\left(0, \sigma^2\right), \;\; \rho = \langle XY \rangle / \sigma^2 = 0$$

導出は以下である。先ず、

$$X = R\cos\Phi\,, \;\; Y = R\sin\Phi$$

とする。変数変換のヤコビアン J は

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r$$

であるので、R と Φの同時確率分布は

$$f\left(r,\phi\right) = \frac{J}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2(r,\phi) + y^2\left(r,\phi\right)\right\}\right) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

となり、R の周辺積分

$$f_R\left(r\right) = \int_0^{2\pi} f\left(r,\phi\right) d\phi$$

を求めれば、⑤式を得る。

レイリー分布は移動通信の見通し外伝搬環境(直接波が遮へいされているところに多数の散乱波（反射波や回折波）が到来するマルチパス環境）での信号振幅（包絡線）の分布を表すモデルに使われる。振幅変動がレイリー分布で表されるマルチパス環境は**レイリーフェージング環境**と呼ばれる。

振幅変動を表す確率変数 R に対して $Z=R^2$ で表される量 Z は電力や SN 比に対応する。この確率密度関数は $dz=2rdr$ なので、

$$f_Z(z)=\frac{1}{\langle Z\rangle}\exp\left(-\frac{z}{\langle Z\rangle}\right)\qquad\left(\langle Z\rangle=2\sigma^2\right)\qquad⑥$$

となる。これは**指数分布**と呼ばれる。

ここでは、指数分布を電力変動の確率分布を表すものとして説明したが、**ポアソン過程**のように、ランダムに変動する現象における事象の発生間隔など、様々な時間間隔を表す分布としてもお馴染みであり、適用分野が広い分布である。この後のガンマ分布の節で説明するように、指数分布はガンマ分布に含まれる（＝ガンマ分布の一部である）。

3.2 仲上・ライス分布とその二乗分布（⑦, ⑧）

仲上・ライス分布は次式で表される。

$$f(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+a^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right)\qquad⑦$$

仲上・ライス分布は、レイリー分布を得た環境に一定量 a が加わった環境で、図１のように表される。図では、r の基準点を原点に、a の位置を x 軸上に置いているが、$x^2+y^2=a^2$ となるどこでもよい。確率変数 X, Y と R, Φ の関係は以下である。

$$f_X(x)=N\left(a,\sigma^2\right),\ f_Y(y)=N\left(0,\sigma^2\right),\ X=R\cos\Phi,\ \ Y=R\sin\Phi,\ \langle XY\rangle=0,\ J=r$$

確率変数 X, Y の同時確率分布（２変量正規分布）は、③式より

$$f(x,y)\{=f_X(x)f_Y(y)\}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-a)^2+y^2\right\}\right]$$

確率変数 R, Φ の同時確率分布は、

$$f(r,\phi)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(r^2+a^2-2ar\cos\phi\right)\right\}$$

確率変数 R の周辺分布は

$$f(r)=\int_0^{2\pi}f(r,\phi)\,d\phi=\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(r^2+a^2\right)\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{ar}{\sigma^2}\cos\phi\right)d\phi$$

となる。変形ベッセル関数 I_0 の積分表示公式より、積分が下記のように解け、⑦式を得る。

$$I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp\left(x\cos\theta\right)d\theta\ \ \rightarrow\ \ \int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{ar}{\sigma^2}\cos\phi\right)d\phi=2\pi I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right)$$

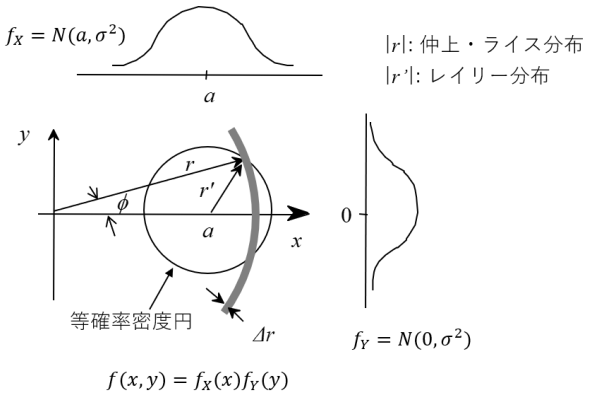


図１　仲上・ライス分布

仲上・ライス分布は、直接波と共に散乱波が多数到来するマルチパス環境を表現するモデルに使われる。この環境で起きるフェージングは**仲上・ライスフェージング**と呼ばれる（注:ライスフェージングと呼ばれることも多いが、呼び名についてはティータイム欄参照)。定常成分 a を 0 とすれば、レイリー分布になるので、仲上・ライス分布はマルチパス環境を表現する汎用性の高い分布と言える。仲上・ライスフェージングモデルでは定常信号成分（通常は直接波成分）と不規則変動信号成分（散乱波成分）の平均電力比 K を用いて分布を表すことが多い。K は**ライスファクタ**（あるいは K ファクタ）と呼ばれる。⑥式をライスファクタ K と定常信号成分電力 Γ_d を用いて表すと次式になる。

$$f_R(r) = \frac{2Kr}{\Gamma_d} \exp\left\{-K\left(1+\frac{r^2}{\Gamma_d}\right)\right\} I_0\left(2K\frac{r}{\sqrt{\Gamma_d}}\right) \quad \left(K \equiv \frac{a^2}{2\sigma^2},\ \Gamma_d \equiv a^2\right) \quad ⑦'$$

伝送特性の評価に用いられる $Z=R^2$ と変換した電力次元での確率分布 $f_Z(z)$は、変数変換率（ヤコビアン）$dz=2rdr$ を踏まえて、次式を得る。

$$f_Z(z) = \frac{K}{\Gamma_d} \exp\left\{-K\left(1+\frac{z}{\Gamma_d}\right)\right\} I_0\left(2K\sqrt{\frac{z}{\Gamma_d}}\right) \quad \left(\langle Z \rangle = a^2 + 2\sigma^2\right) \quad ⑧$$

この分布は**自由度２の非心カイ二乗分布**（厳密にはカイ二乗分布は分散σ^2=1 のものに対して言うので、σ^2 をパラメータとするこのケースでは**一般化非心カイ二乗分布**と呼ばれる）である。自由度 Nの非心カイ二乗分布は 4.3 節で、Mブランチの最大比合成の分布は 7 節で述べる。なお。⑦式、⑧式において、変形ベッセル関数 I_0 の引数の値が大きくなると（すなわち、K の値を大きくすると）I_0 の値が極端に大きくなり（その場合は exp の部分が極端に 0 に近づき)、計算ソフトによっては数値計算ができなくなる場合がある。その場合の対処は、[2]の仲上・ライス分布の項を見てほしい。

ティータイム：　仲上・ライス分布の由来

1930年代後半から1940年代、不規則信号の振幅の確率分布の理論的研究は、我が国では国際電気通信株式会社（当時）の仲上稔により、米国ではベル研究所のライス（S. O. Rice）により独立に行われていた。仲上は短波の受信信号の強度分布の理論的考察から、一つの確率分布を与える式を1940年の電気通信学会誌に発表した[4]。同じ式は、ライスにより、雑音下での信号の強度分布を与える分布として、ベル研の技術雑誌BSTJに、1944/1945年に発表された[5]（一つの論文が２回に分けて発表され、当該分布が提示されているのは1945年の号）。論文誌の国際性や認知度の違いから、この分布は世界（主に欧米）では長く「ライス分布（Rician distribution）」と呼ばれてきたが、我が国先達の努力によって、「仲上・ライス分布（Nakagami-Rice distribution）」の呼び名が定着しつつある。（無線通信の国際標準化機関（ITU-R）の文書では、仲上・ライス分布が用いられるが、IEEEの論文誌などではまだライス分布と呼ばれることが多い）。

上述のとおり、この分布は、今日、「仲上・ライス分布（あるいはライス分布）」と呼ばれているが、当時の我が国での呼び名は「n 分布」であった。（注：仲上は自身が編み出した三つの分布にn, q, m分布と名付けた）

定常成分と不規則変動成分の合成信号振幅の確率分布を考える。これは、マルチパスフェージングで言えば、i) 直接波と多数の散乱波が合成された信号の振幅、あるいは、ii) 粗面に反射された電波の正規反射成分（コヒーレント成分）と不規則変動成分（インコヒーレント成分）の合成振幅であり、通信では、iii) 搬送波信号に雑音が重畳された信号の振幅の確率分布に相当する。

現在、多くの教科書や専門書において、仲上・ライス分布は、図２を用いて本節で説明したような理論展開が採られている。我々は、このようにして、仲上・ライス分布を学んでいると思うが、この説明の仕方はライス流である。

仲上の導出方法はこれとは異なっている。短波の伝搬環境では、振幅の異なる多数の正弦波が合成されていると考える。多数の確率変数の和の分布の解析には、確率密度関数の畳み込み積分になるので、各分布を特性関数に変換し、そこで解析するのが常道である。そのとき、仲上はこの変換にハンケル変換型の特性関数を利用している。そしてその結果として⑦式を導いている。導出の詳細は、[6]の9.4節に詳しくまとめられているので、ここでは割愛する。

このようにして、同時代の洋の東西で、異なる目的、異なる手法で、後の時代の移動伝搬の基本式：仲上・ライス分布が生まれたことが興味深い。なお、仲上を世界的に有名にしている分布は、この後に示すに示す仲上 m 分布である。　　（ここまで、[2]のコラム記事（pp. 56-57）より）

もう一点補足したい。本文で、仲上・ライス分布は自由度２の非心カイ分布であることを述べた。非心カイ二乗分布が統計学で体系化されたのが 1930～1940 年代、非心カイ分布の体系化は 1950 年代と言われている。ゆえに、1940 年、仲上によって示されたこの分布は、確率統計分野の歴史においても、そのオリジナルは仲上にあると言える。

3.3 仲上・ホイト分布（⑨）

仲上・ホイト分布は、レイリー分布より深いフェージング（＝変動幅が大きい）を表わす分布で、次式で与えられる。

$$f(r)=\frac{r}{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{r^2}{4\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}+\frac{1}{\sigma_y^2}\right)\right\}$$
$$\times I_0\left(\frac{r^2}{4\left(1-\rho^2\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_x^2}-\frac{1}{\sigma_y^2}\right)^2+\frac{4\rho^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}}\right) \qquad ⑨$$

$$f_X(x)=N\left(0,\sigma_x^2\right),\ \ f_Y(y)=N\left(0,\sigma_y^2\right),\ \ \frac{\langle XY\rangle}{\sigma_x\sigma_y}=\rho,\ \ R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

図２に示す平面座標（*xy* 座標）において、原点を中心とする等確率密度線が楕円で表されるときの中心からの長さ *r* の確率分布である。以下、この式を導く。

多変量正規分布④の各要素は次式である。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{pmatrix}\qquad \left|\Sigma\right|=\sigma_x^2\sigma_y^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2\left(1-\rho^2\right)}\begin{pmatrix}\sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y\\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2\end{pmatrix}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}\\ -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}\\ -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-\frac{\rho xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)$$

ゆえに、変数 *X* と *Y* の同時確率分布は次式となる。

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\}$$

式中の *x*, *y* を $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$ として代入すると、上式の右辺は

$$\text{右辺}=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho\cos\phi\sin\phi}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{\sin^2\phi}{\sigma_y^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}+\frac{1}{\sigma_y^2}\right)\right\} \exp\left\{A\cos\left(2\phi+\alpha\right)\right\}$$

$$A = \frac{r^2}{4\left(1-\rho^2\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_x^2}-\frac{1}{\sigma_y^2}\right)^2+\frac{4\rho^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}}, \quad \alpha = \text{定数（表記略）}$$

となる。ヤコビアン $J(=r)$ をかけて変数 R と Φの同時確率分布に変換すると次式になる。

$$f(r,\phi) = \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}+\frac{1}{\sigma_y^2}\right)\right\} \exp\left\{A\cos\left(2\phi+\alpha\right)\right\}$$

変数 R につての周辺分布式は

$$f_R(r) = \int_0^2 f(r,\phi)d\phi$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}+\frac{1}{\sigma_y^2}\right)\right\} \int_0^{2\pi} \exp\left\{A\cos\left(2\phi+\alpha\right)\right\}d\phi$$

となり、仲上・ライス分布のところで説明した変形ベッセル関数 I_0 の積分表示公式を用いると⑨式が得られる。

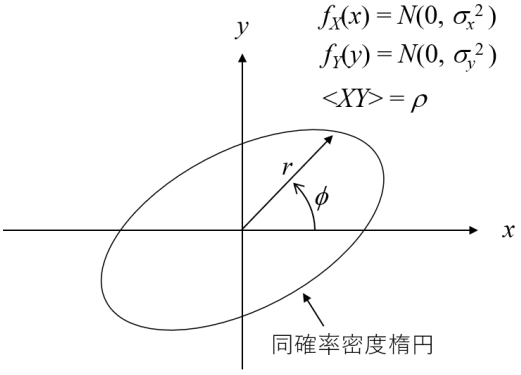


図２　仲上・ホイト分布

仲上・ホイト分布の誕生経緯を述べる。仲上稔は 1942 年、佐々木哲夫と共著で、⑧式でρ=0 の場合の式を導いている[7]。目的がレイリー分布より深いフェージング発生のメカニズムを追及する中で生まれたものなので、導出の過程が非常に複雑になっている（＝わかりにくい)。仲上はこの分布を q 分布と呼んだ。一方、米国 Bell 研究所の R. S. Hoyt は、1947 年、ベル研の論文誌 BSTJ に、無相関不等分散の数学モデルとして分布式を導いている[8]（導出方法は本レポート説明のρ=0 とした場合に近い)。その後の 1964 年、仲上は相関を含めた解析を行って⑨式を提

示している[9]。（論文提示式と⑨式は見かけが異なるが、整理すると同じになる）。この分布も仲上・ライス分布の場合と同様、世界的には Hoyt 分布と呼ばれることが多いが、今日では仲上・ホイト分布で通用するようになっている。

仲上・ホイト分布は２変量の合成分布として非常に汎用性が高いのであるが、電波伝搬モデルの中で用いられることは少ない。それは、電波伝搬では、不規則変動過程における複素信号領域（＝ベースバンドの *IQ* 信号振幅）を扱うことが多いが、その変動が実数領域と複数領域で非対称になる（＝分散が異なる）ことがないからである。一方で、仲上・ホイト分布はレイリー分布より深いフェージング（＝変動幅が大きい）を表わすので、その目的で利用されることはある。ただ、4.2 節で述べる仲上m分布もその機能を有していて、使い分けや根拠を与える物理的な説明は難しい

４．多変量正規分布のノルムとその二乗値の分布

次式に示すノルム *R* やその二乗量 *Z* を確率変数とする分布を考える。

$$R = \|\boldsymbol{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} X_i^2} \quad , \qquad Z = R^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2$$

個々の確率変数 X_i に対して、それが平均値 0（中心：central）か値をもつ（非心：noncentral）か、分散が等しいか異なるか、相関があるかないかで、複雑さも相当に異なってくる。以下、簡単な順に並べてゆきたい。

4.1 カイ分布とカイ二乗分布（⑩, ⑪）

条件： $X_i \sim N(0,\sigma^2)$ $\rho_{ij} = \langle X_i X_j / \sigma^2 \rangle = 0 \ (i \neq j)$

変数 *R* の分布が自由度 *N* の**カイ（χ）分布**、*Z* の分布が**カイ二乗（χ²）分布**であり、それぞれ次式で与えられる。

$$f_R(r) = \frac{1}{2^{N/2-1}\Gamma(N/2)\sigma^N} r^{N-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \qquad ⑩$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)\sigma^N} z^{N/2-1} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right) \qquad ⑪$$

厳密な定義では、カイ分布及びカイ二乗分布は分散σ^2=1 の標準正規分布に対して言われるので、上式は広い意味でのカイ/カイ二乗分布である。分散を含めた上記分布は一般化カイ/カイ二乗分布と呼ばれるが、この一般化にはもっと複雑な設定（一般化の一般化）を含めて呼ばれることもあり、この混乱を避けるため、ここでは、⑩/⑪式を広い意味に捉え、カイ/カイ二乗分布と呼ぶことにする。

カイ分布とカイ二乗分布の違いは変数変換の違いのみであるので、ここでは、カイ二乗分布の導出を示す。導出にはいろいろな方法があるが、**積率母関数**（MGF）に変換して求めるのが、考え方の上では一番素直である。これはラプラス変換とその逆変換なので数式展開自体は既に導かれている形を知らないと骨の折れる部分がある。ここでは、流れだけを簡潔に示す。

$Z_i = X_i^2$ とするとき、Z_i の確率分布 f_{Zi} の MGF $M_{zi}(t)$ は次式である。

$$f_{Z_i}(z_i) = \frac{1}{2\sqrt{z_i}}\left\{ f_{R_i}\left(-\sqrt{z_i}\right) + f_{R_i}\left(\sqrt{z_i}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} z_i^{-1/2} \exp\left(-\frac{z_i}{2\sigma^2}\right)$$

$$M_{Z_i}(t) = \left\langle e^{tz_i} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2 t}} \quad \left(t < \frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

カイ二乗分布の MGF M_Z は各 Z_i の MGF の積（$= N$ 乗）になる。

$$M_Z(t) = \prod_{i=1}^{N} M_{Z_i}(t) = \left(1-2\sigma^2 t\right)^{-N/2}$$

これを逆変換すると⑪式になる。

4.2 仲上 m 分布とガンマ分布（⑫, ⑬）

仲上m分布は次式で与えられる[10],[11]。

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left\{-\frac{m}{\Omega} r^2\right\} \qquad \left(m \geq 0.5,\ \ \Omega = \left\langle R^2 \right\rangle\right) \qquad ⑫$$

上記のパラメータ m,Ωに対して

$$m = N/2, \quad \Omega = N\sigma^2$$

とすると、⑩式の自由度 $2m$ のカイ分布になる。そう、仲上m分布とカイ分布は数学的に同じ構造をもつ。カイ二乗分布は 1900 年に Karl Pearson によって導かれていて、カイ分布はその平方根の分布として 1930 年頃には既に登場しているらしい。ならば、1943 年にフェージングデータが示す統計的性質として仲上稔氏が編み出した仲上m分布は分布の再発見と呼ぶべきなのだろうか。いや、そうではない。カイ分布は N を整数とする数学モデルであるのに対し、仲上m分布は、m≥0.5 のみが条件だけの伝搬モデル用分布であり、概念（あるいは意味）が違うのである。同様なことは、この後述べるカイ二乗分布とガンマ分布についても言える。

ここで、本道である仲上m分布が生まれた経緯を簡単に述べておきたい。仲上は、当時（1930～1940 年代）、短波（電離素伝搬）の受信強度変動データ（フェージングデータ）の数分単位のヒストグラム（確率密度関数に相当）を、レイリー分布がグラフ上に $y = x$ の直線で表される特殊方眼紙（相対頻度グラフ）上にプロットしていた。結果、イベント毎のフェージングに強弱はあるが、特殊方眼紙上に、傾きの異なる直線で現れたのである。この直線 $y = mx$ （m=1 がレイリー分布）となる確率分布を、座標変換の式を逆変換して確率分布を求めると⑫式になるのであ

る。仲上はこの分布を、1943 年に、信学会の論文に発表している。(この導出の詳細は、[1]の付録１、あるいは、[3]の６章にまとめている)。この場合、パラメータ mは、実験データが示した $m\geq 0.5$ であればよく、多次元空間での導出のように $m=N/2$ で、N を整数とするような制約はない。このように、仲上m分布は、経験則として生まれた分布であるので、どういう物理現象（＝電波伝搬メカニズム）を表すものであるかが掴みにくく、仲上自身もその解釈に頭を悩ませていたようである。前半で行ったカイ分布へ結び付けての説明は後付けで、それはそれでよいとしても、複素平面上の２次元現象で表されるマルチパスフェージングモデルとしての解釈はいまだに漠としている。そう言う経緯ではあっても、経験則として生まれた分布が、実は、正規分布の理論体系の中に主要な位置を占めているという事実は大変興味深い。なお、仲上m分布はこの後述べるガンマ分布と変数同士が $Z=R^2$ で結ばれるので、そこで再度取り上げる。

ガンマ分布は次式で与えられる。

$$f(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\beta^{\nu}z^{\nu-1}\exp(-\beta z)\qquad(\nu>0,\ \beta>0) \tag{⑬}$$

これも、上記パラメータ ν, β に対して

$$\nu=\frac{N}{2},\quad \beta=\frac{1}{2\sigma^2}$$

とすると、⑪式のカイ二乗分布になる。そう、ガンマ分布とカイ二乗分布は同じ構造をもつ。しかし、これも、パラメータの扱いの違い（整数か実数かと言った）や意味の違いから、別の分布の扱い（カイ二乗分布はガンマ分布の特殊ケース）になっている。

なお、ガンマ分布と仲上 m 分布は $Z=R^2$ の関係において全く同一の分布（パラメータの定義域にわずかの差はあるが）。ガンマ分布は 19 世紀末には確立していたが、振幅（ノルム）の分布として 1943 年まで、誰かが⑫式の形を提案していなかったのかという疑問が湧く。でも、どうもそれは無かったらしい（AI に確認）。仲上による分布発見の経緯ももちろん異なるし、無線工学への探求心がそれを呼び寄せたと言えるのではないだろうか。

4.3 非心カイ分布と非心カイ二乗分布（⑭, ⑮）

条件： $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\ \ \rho_{ij}=0\ \ (i\neq j\ ;\ i,j=1\sim N)$

ノルム R、その二乗値 Z $(=R^2)$の分布は自由度 N の（一般化）**非心カイ分布**及び**非心カイ二乗分布**と呼ばれ、それぞれ次式で与えられる。

$$f_R(r)=\frac{r}{\sigma^2}\left(\frac{r^2}{N\mu^2}\right)^{\frac{N}{4}-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{r^2+N\mu^2}{2\sigma^2}\right)I_{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{N}|\mu|r}{\sigma^2}\right) \tag{⑭}$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{z}{N\mu^2}\right)^{\frac{N}{4}-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{z+N\mu^2}{2\sigma^2}\right)I_{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{N}|\mu|\sqrt{z}}{\sigma^2}\right)\quad ⑮$$

仲上・ライス分布の項で述べたように、N=2、 $\mu=a/\sqrt{2}$ とすると非心カイ分布は仲上・ライス分布になる。

導出は、カイ二乗分布のときと同じ手順である。

$Z_i=X_i^2$ とするとき、Z_i の確率分布 f_{Zi} の MGF $M_{zi}(t)$ は次式である。

$$f_{Z_i}(z_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}z_i^{-1/2}\exp\left(-\frac{z_i+\mu^2}{2\sigma^2}\right)\cosh\left(\frac{\mu\sqrt{z_i}}{\sigma^2}\right)$$

$$M_{Z_i}(t)=\frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2t}}\exp\left(\frac{\mu^2t}{1-2\sigma^2t}\right)$$

カイ二乗分布の MGF M_Z は各 Z_i の MGF の積になる。

$$M_Z(t)=\prod_{i=1}^{N}M_{Z_i}(t)=\left(1-2\sigma^2t\right)^{-N/2}\exp\left(\frac{N\mu^2t}{1-2\sigma^2t}\right)$$

これを逆変換すると⑮式になる。

4.4 より複雑な分布

分散の値が異なる、あるいは相関があると言う設定をすると、式はより複雑にり、閉形式では表せなくなったりする。ここでは電波伝搬モデルへの応用（振幅分布やダイバーシチ合成）を目的にしており、それらについては、ここで議論するよりも、次の多変量レイリー分布あるいは多変量仲上・ライス分布の項で議論したほうが良い。土俵を狭くすることによって、簡易な式になる場合があるからである。

５．多変量レイリー分布

無線通信の伝搬モデルに現れる確率分布は､複素平面上に現れる信号変動を表すものが多いため、xy 平面上での等分散・無相関の現象を扱うのが一般的である。仲上・ホイト分布のように不等分散･有相関まで範囲を広げても､それを使わなければいけないモデルはあまり出てこない。一方、個々の複素平面上では、等分散・無相関であるが、この平面を単位として、平面間には相関をもつモデルはダイバーシチ合成を検討するような際には必要になる｡個々の面での振幅確率はレイリー分布であるが、複数のレイリー分布間には相関があると言う意味である。

5.1 一般式（⑯）

それぞれの分散が異なる M 個のレイリー分布する変量があり､それらには相関行列Σで与えら

れる相関がある場合を対象とし、これを**多変量レイリー分布**と呼ぶ。このときの同時確率分布は以下の形になろう。

$$f\left(r_1, r_2, \cdots, r_M; \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_M; \Sigma\right) = ? \qquad ⑯$$

$$f_{R_m}\left(r_m\right) = \frac{r_m}{\sigma_m^2}\exp\left(-\frac{r_m^2}{2\sigma_m^2}\right) \quad \left(m = 1, 2, \cdots, M\right)$$

$$\Sigma = 2\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1M}\sigma_1\sigma_M \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2M}\sigma_2\sigma_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M1}\sigma_M\sigma_1 & \rho_{M2}\sigma_M\sigma_2 & \cdots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}$$

式⑯の右辺が?なのは、一般解として得られた分布式がないためである。多変量正規分布の形までは④式そのもので良いのであるが、振幅の同時確率分布（JPDF）を得る最終段階に行う位相変数消去のための周辺化

$$\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f_{R\Phi}\left(r_1, r_2, \cdots, r_M, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_M\right) d\phi_1 \cdots d\phi_M$$

に、M=3 以上では積分が残ってしまい、使いやすい式にならないのである。そのため、この隘路を切り開くべく様々な試みがなされており、具体的なことは[12]やその引用文献を見てほしい。ここでは、手計算で導くことができる M=2 と 3 について示す。また、有相関環境フェージングにおける最大比合成（MRC）ダイバーシチへの適用では、同時確率分布が得られなくても相関行列から合成受信電力（あるいは SN 比）を求めることができ、6 節（case 3）ではそれを示す。しかし、選択合成ダイバーシチ等、ブランチ毎の分布を用いて伝送特性を評価したい場合には、このような多変量レイリー分布そのものが必要になる[13]。

5.2 ２変量レイリー分布と２変量指数分布（⑰, ⑱）

有相関**２変量レイリー分布**は 4 変量正規分布から求められ、以下の式で表される。

$$f\left(r_1, r_2\right) = \frac{4r_1r_2}{\left(1-|\rho|^2\right)\Gamma_1\Gamma_2}\exp\left\{-\frac{1}{1-|\rho|^2}\left(\frac{r_1^2}{\Gamma_1}+\frac{r_2^2}{\Gamma_2}\right)\right\} I_0\left\{\frac{2|\rho|r_1r_2}{\left(1-|\rho|^2\right)\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}\right\} \qquad ⑰$$

$$f_{X_m}(x_m) = f_{Y_m}(y_m) = N\left(0, \sigma_m^2\right) \quad \left(m = 1, 2\right), \qquad \Gamma_m = \left\langle R_m^2 \right\rangle = 2\sigma_m^2$$

この分布は、通信理論の専門書に取り上げられているが（例えば[14]）、オリジナルは S. O. Rice の BSTJ 論文（[15]の後半(1945)の p. 78, Rice 分布を導いた論文）である。Z_m=R_m^2 として変数変換すれば**２変量指数分布** $f_Z(z_1,z_2)$が得られる。

$$f\left(z_1,z_2\right)=\frac{1}{\left(1-\left|\rho\right|^2\right)\Gamma_1\Gamma_2}\exp\left\{-\frac{1}{1-\left|\rho\right|^2}\left(\frac{z_1}{\Gamma_1}+\frac{z_2}{\Gamma_2}\right)\right\}I_0\left\{\frac{2\left|\rho\right|}{\left(1-\left|\rho\right|^2\right)}\sqrt{\frac{z_1z_2}{\Gamma_1\Gamma_2}}\right\} \qquad ⑱$$

以下、この導出を行う。

時間的に変動する二つの複素量信号 a_1, a_2 を考える。IQ 信号平面上の信号点位置である。

$$a_1=x_1+jy_1=r_1e^{j\phi_1},\quad a_2=x_2+jy_2=r_2e^{j\phi_2}$$

これを確率変数として、大文字で表すと、以下である。

$$A_i=X_i+jY_i,\quad X_i=R_i\cos\Phi_i,\ Y_i=R_i\sin\Phi_i\ \left(i=1,2\right)$$

相関係数ρは次式で定義され、複素数である。

$$\rho\left(=\left|\rho\right|e^{j\varphi}\right)=\frac{\left\langle A_1^*A_2\right\rangle}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_1}}=\frac{1}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_1}}\left\{\left\langle X_1X_2\right\rangle+\left\langle Y_1Y_2\right\rangle+j\left(\left\langle X_1Y_2\right\rangle-\left\langle X_2Y_1\right\rangle\right)\right\}$$

$$\rightarrow\ \left\langle X_1X_2\right\rangle+\left\langle Y_1Y_2\right\rangle=\left|\rho\right|\cos\varphi,\ \left\langle X_1Y_2\right\rangle-\left\langle X_2Y_1\right\rangle=\left|\rho\right|\sin\varphi$$

二つのレイリー分布の構造の対称性から次の性質がある。

$$\left\langle X_1X_2\right\rangle=\left\langle Y_1Y_2\right\rangle\ \rightarrow\ \frac{\left\langle X_1X_2\right\rangle}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_1}}=\frac{\left\langle Y_1Y_2\right\rangle}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_1}}=\frac{1}{2}\left|\rho\right|\cos\varphi$$

$$\left\langle X_1Y_2\right\rangle=-\left\langle X_2Y_1\right\rangle\ \rightarrow\ \frac{\left\langle X_1Y_2\right\rangle}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_1}}=-\frac{\left\langle X_2Y_1\right\rangle}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_1}}=\frac{1}{2}\left|\rho\right|\sin\varphi$$

４つの確率変数（X_1, Y_1, X_2, Y_2）の相関行列を求める。

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\Sigma=\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\left\langle\begin{pmatrix}X_1^2 & X_1Y_1 & X_1X_2 & X_1Y_2\\ Y_1X_1 & Y_1^2 & Y_1X_2 & Y_1Y_2\\ X_2X_1 & X_2Y_1 & X_2^2 & X_2Y_2\\ Y_2X_1 & Y_2Y_1 & Y_2X_2 & Y_2^2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Gamma_1 & 0 & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\cos\varphi & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\sin\varphi\\ 0 & \Gamma_1 & -\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\sin\varphi & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\cos\varphi\\ \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\cos\varphi & -\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\sin\varphi & \Gamma_2 & 0\\ \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\sin\varphi & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\left|\rho\right|\cos\varphi & 0 & \Gamma_2\end{pmatrix}$$

これで、式⑰導出の準備ができた。以下、本質を損なわない範囲で、数式の展開を簡易にするため、相関係数が実数の場合を求める。すなわち、φ=0 とし、$|\rho| \rightarrow \rho$と記す。相関行列は以下である。

$$\Sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho & 0 \\ 0 & \Gamma_1 & 0 & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho \\ \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho & 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho & 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$|\Sigma| = \frac{1}{2^4}\Gamma_1^2\Gamma_2^2\left(1-\rho^2\right)^2$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{2}{\Gamma_1\Gamma_2\left(1-\rho^2\right)}\begin{pmatrix} \Gamma_2 & 0 & -\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & -\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho \\ -\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho & 0 & \Gamma_1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho & 0 & \Gamma_1 \end{pmatrix}$$

これらを、基本式に代入して、４変量正規分布を求める。

$$f\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^2|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2\Gamma_1\Gamma_2\left(1-\rho^2\right)}\exp\left[-\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{1}{\Gamma_1}\left(x_1^2+y_1^2\right)+\frac{1}{\Gamma_2}\left(x_2^2+y_2^2\right)-\frac{2\rho}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}\left(x_1x_2+y_1y_2\right)\right\}\right]$$

これを、確率変数 R_1 と R_2 の同時確率密度関数に変換する。ヤコビアンが

$$J = \left|\frac{\partial\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)}{\partial\left(r_1,\phi_1,r_2,\phi_2\right)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 & 0 & 0 \\ -r_1\sin\phi_1 & r_1\cos\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi_2 & \sin\phi_2 \\ 0 & 0 & -r_2\sin\phi_2 & r_2\cos\phi_2 \end{vmatrix} = r_1r_2$$

であるので、

$$f\left(r_1,\phi_1,r_2,\phi_2\right) = \frac{r_1r_2}{\pi^2\Gamma_1\Gamma_2\left(1-\rho^2\right)}\exp\left[-\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{r_1^2}{\Gamma_1}+\frac{r_2^2}{\Gamma_2}-\frac{2\rho r_1r_2}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)\right\}\right]$$

$$f(r_1,r_2)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r_1,\phi_1,r_2,\phi_2)\,d\phi_1 d\phi_2$$

$$=\frac{4r_1r_2}{\left(1-\rho^2\right)\Gamma_1\Gamma_2}\exp\left\{-\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{r_1^2}{\Gamma_1}+\frac{r_2^2}{\Gamma_2}\right)\right\}I_0\left\{\frac{2\rho r_1r_2}{\left(1-\rho^2\right)\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}\right\}$$

ここでは、相関係数が実数の場合を導いたので上式で$\rho \rightarrow |\rho|$とすれば⑰式になる。

5.3 ３変量レイリー分布と３変量指数分布（⑲, ⑳）

有相関**３変量レイリー分布**は、上記２変量の場合に４変量正規分布から導いたのと同様に６変量正規分布から求められ、以下の式で表される。この式は筆者が調べた範囲では過去文献からは見つけられず、独自に導いたものであるが、新規性は不明である。

$$f(r_1,r_2,r_3)=\frac{4r_1r_2r_3}{\pi\Delta\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}\exp\left\{-\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1-c^2}{\Gamma_1}r_1^2+\frac{1-b^2}{\Gamma_2}r_2^2+\frac{1-a^2}{\Gamma_3}r_3^2\right)\right\}$$

$$\times\int_0^{2\pi}\exp(\gamma\cos\phi)\,I_0\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\phi}\right)d\phi \qquad ⑲$$

$$\Delta\equiv 1-a^2-b^2-c^2+2abc,\quad \Gamma_m=\left\langle R_m^2\right\rangle=2\sigma_m^2\quad (m=1,2,3)$$

$$a=|\rho_{12}|,\ b=|\rho_{13}|,\ c=|\rho_{23}|$$

$$\alpha=\frac{2(a-bc)}{\Delta\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}r_1r_2,\ \beta=\frac{2(b-ac)}{\Delta\sqrt{\Gamma_1\Gamma_3}}r_1r_3,\ \gamma=\frac{2(c-ab)}{\Delta\sqrt{\Gamma_2\Gamma_3}}r_2r_3$$

残念ながら、周辺化が完全にはできず位相の積分が一つ残る。この部分は数値計算に頼るしかない。導出の手順は長くなるので、式の妥当性の数値シミュレーションによる確認と共に、付録に示す。

$Z_m=R_m^2$ として変数変換すれば**３変量指数分布** $f_Z(z_1,z_2,z_3)$が得られる。

$$f_Z(z_1,z_2,z_3)=\frac{1}{2\pi\Delta\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}\exp\left\{-\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1-c^2}{\Gamma_1}z_1+\frac{1-b^2}{\Gamma_2}z_2+\frac{1-a^2}{\Gamma_3}z_3\right)\right\}$$

$$\times\int_0^{2\pi}\exp(\gamma\cos\phi)\,I_0\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\phi}\right)d\phi \qquad ⑳$$

$$\alpha=\frac{2(a-bc)}{\Delta}\sqrt{\frac{z_1z_2}{\Gamma_1\Gamma_2}},\quad \beta=\frac{2(b-ac)}{\Delta}\sqrt{\frac{z_1z_3}{\Gamma_1\Gamma_3}},\quad \gamma=\frac{2(c-ab)}{\Delta}\sqrt{\frac{z_2z_3}{\Gamma_2\Gamma_3}}$$

6．多変量レイリー分布出力の最大比合成

ここからは、ダイバーシチ受信における最大比合成後の電力相当量（SN 比等変数の次元が電力相当量と言う意味）の確率分布を扱う。故に、変数は Z を用いる。

$$Z=R^2=\sum_{m=1}^{M}R_m^2,\quad R_m=\left|X_m+jY_m\right|,\quad \Gamma_m=\left\langle R_m^2\right\rangle=2\sigma_m^2$$

パラメータ M はブランチ数であり、多変量正規分布の変量数 N に対して、$M=N/2$ に対応する整数である。

Case 1 等分散・無相関（㉑, ㉒）

この場合は変数 Z の分布は $\nu=N/2=M$, $\beta^{-1}=2\sigma^2=\Gamma_0$ のカイ二乗分布であり、すなわち次式のガンマ分布である。

$$f(z)=\frac{z^{M-1}}{\Gamma(M)\Gamma_0^M}\exp\left(-\frac{z}{\Gamma_0}\right) \qquad ㉑$$

通常のガンマ分布との違いは、パラメータ M に整数の条件が付けられていることである。この条件づけによって、累積分布関数が次式のように有限和の閉形式で表され、このメリットが大きい。

$$F(z)=1-\exp\left(-\frac{z}{\Gamma_0}\right)\sum_{m=1}^{M}\frac{z^{m-1}}{\Gamma(m)\Gamma_0^{m-1}} \qquad ㉒$$

式中の Γ_0 を M 素子アレーの素子アンテナの SN 比とすれば、z が最大比合成ダイバーシチ適用後の SN 比になる。

Case 2 不等分散・無相関（㉓, ㉔）

確率分布の PDF と CDF は以下である。

$$f(z)=\frac{1}{\prod_{k=1}^{M}\Gamma_k}\sum_{m=1}^{M}\frac{\exp\left(-z/\Gamma_m\right)}{\prod_{\substack{n\neq m\\ n=1}}^{M}\left(\frac{1}{\Gamma_n}-\frac{1}{\Gamma_m}\right)} \qquad ㉓$$

$$F(z)=1-\sum_{m=1}^{M}\frac{\Gamma_m^{M-1}\exp\left(-z/\Gamma_m\right)}{\prod_{\substack{n\neq m\\ n=1}}^{M}\left(\Gamma_m-\Gamma_n\right)} \qquad ㉔$$

指数分布の MGF M_{Zi} と MRC 後の Z の分布の MGF M_Z は次式である。

$$M_{Z_m}(t)=\frac{1}{1-\Gamma_m t} \quad \rightarrow \quad M_Z(t)=\prod_{m=1}^{M}\frac{1}{1-\Gamma_m t}$$

PDF はこの逆変換により得られる。

Case 3 不等分散・有相関（㉕, ㉖）

有相関の場合は、相関行列の固有ベクトルを用いて無相関の出力に変換し、Case 2 の式に帰着させる。その基本的な考え方を示す。各ブランチの瞬時出力を以下とする。

$$\boldsymbol{a}(t)=\left(a_1(t)\quad a_2(t)\quad \cdots\quad a_N(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

この相関行列Σを固有値分解する。

$$\Sigma=\left\langle \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\right\rangle = E\Lambda E^{\mathrm{H}} \quad \left(\Lambda=\mathrm{diag}\left(\lambda_1\quad \lambda_2\quad \cdots\quad \lambda_M\right)\right)$$

E は N 個の固有ベクトルで構成されるユニタリ行列、Λは固有値λ_1～λ_Mを対角成分に持つ対角行列である。このユニタリ行列を用いて、相関の無いブランチ出力ベクトル $\boldsymbol{b}$ を作る。

$$\boldsymbol{b}(t)=E^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(t) \quad \rightarrow \left\langle \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}\right\rangle=\Lambda$$

この変換は直交座標変換である。対象とする信号の時系列 $z(t)$はベクトル $\boldsymbol{a}$ 同士の内積（に相当する量）である。内積には、直交座標変換によって値は変わらないと言う性質がある。すなわち、瞬時瞬時の時刻において

$$z(t)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{b}(t)$$

となり、無相関変動に変換されている $\boldsymbol{b}$ の出力の最大比合成は出力 $\boldsymbol{a}$ で行う結果に同じである。ブランチ m の出力の平均値は固有値λ_m であるので、㉓式のΓ_m をλ_m に置き換え、PDF と CDF は次式になる。

$$f(z)=\frac{1}{\prod_{m=1}^{M}\lambda_m}\sum_{m=1}^{M}\frac{\exp\left(-z/\lambda_m\right)}{\prod_{\substack{n\neq m\\ n=1}}^{M}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_m}\right)} \qquad ㉕$$

$$F(z)=1-\sum_{m=1}^{M}\frac{\lambda_m^{M-1}\exp\left(-z/\lambda_m\right)}{\prod_{\substack{n\neq m\\ n=1}}^{M}\left(\lambda_m-\lambda_n\right)} \qquad ㉖$$

7．多変量仲上・ライス分布出力の最大比合成

$$Z=R^2=\sum_{m=1}^{M}R_m^2,\quad R_m=\left|X_m+jY_m\right|,\quad X_m,\ Y_m\ \sim\ N\left(\mu_m,\sigma_m^2\right)$$

Case 1 等分散・無相関（㉗）

これは、非心カイ二乗分布（⑮式）で $M=N/2$、$P_0=2\mu^2$、$K=P_0/(2\sigma^2)$（K：ライスファクタ）と置き換えると、次式になる。

$$f_Z(z)=\frac{K}{P_0}\left(\frac{z}{MP_0}\right)^{\frac{M-1}{2}}\exp\left\{-K\left(\frac{z}{P_0}+M\right)\right\}I_{M-1}\left(2K\sqrt{\frac{Mz}{P_0}}\right) \qquad ㉗$$

Case 2 不等分散・無相関

この分布は閉形式の形には書き下せない。仲上ライス分布の変数を電力次元の Z に変換し（=⑧式）、その積率母関数(MGF) $M_{Zm}(t)$を求める（式表示：略）。最大比合成後の MGF $M_z(t)$は M 個の M_{Zm} の積になる。ここまではできる。最後のステップである確率分布を得るための逆変換（逆ラプラス変換）は数値解法に因るしかない。その場合でも、Talbot 法など安定に戻す方法が開発されているので、それを利用すると良い。

Case 3 定常成分が同値・不規則成分が不等分散・有相関

6 節の Case3 と同じ扱いができる。散乱成分の相関行列を固有値分解し、この固有ベクトルで構成されるユニタリ行列で直交変換すると、無相関の仲上・ライス分布のブランチ出力が得られる。この後の処理は、上記の Case 2 と同じになる。ゆえに、最後のステップである確率分布を得るための逆変換（逆ラプラス変換）は数値解法に因るしかない。

Case 4 定常成分の位相が不均一・不規則成分が不等分散・有相関

このケースは、独立出力を得る直交変換が難しく、モデルとして利用しやすい形に定式化されたものはない（ように見える）。我と思う人はチャレンジしてほしい。（ただし、Abdi, Kaveh, Alouini, Chiani など、要文献調査）。

8．マルチクラスタ伝搬モデル

ミリ波等新しい時代の移動通信へのニーズに伴って、伝搬モデルにも多機能性が求められるよ

うになっている。近年提案が増えているマルチクラスタ伝搬モデルがその例である。マルチクラスタモデルは、到来パスが複数のクラスタに分かれていると仮定する伝搬モデルで、Yacoub(2007)によって提案されたκ–μ分布やη–μ分布モデルが代表的である[15]。他にも、より高度化されたモデルが提案されているが、ここでは、κ–μ分布とη–μ分布について、その構造を調べる。

8.1 κ–μ分布（㉘）

伝搬エリア内に複数のクラスタがあり、同一クラスタ内では遅延差が無視でき、クラスタごとには異なる遅延があると言う前提に立つ。このようなクラスタごとの電波を分離識別して最大比合成すると言うイメージである。**κ–μ分布**はクラスタごとには安定した電波が支配的な仲上・ライス分布とし、定常波の強度はクラスタごとに異なり、変動成分の平均電力は同一と言う仮定を採っている。確率分布にはノルム（R）で与える分布とその二乗値（Z）で与えるものが示されているが、ここでは、ノルムのケースのみを示す。

$$f_R(r)=\frac{2\mu(1+k)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\kappa^{(\mu-1)/2}\exp(\mu\kappa)}\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{\mu}\exp\left\{-\mu(1+\kappa)\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{2}\right\}I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\,\frac{r}{\hat{r}}\right)\qquad ㉘$$

$$\hat{r}\equiv\sqrt{\langle R^2\rangle}$$

物理イメージとしてはμはクラスタの数、κは定常成分と変動成分の電力比を表すパラメータであるが、この値を適当な値に設定することによって、仲上・ライス分布、レイリー分布、仲上m分布、半ガウス分布など様々な分布を包含する多機能性に富むと主張されている。

(1)式で示した基本構造（分布の核）で見れば、非心カイ分布（⑮式）と同じであり、辛口に言えば、新規性に疑問符が付くが、伝搬モデルとして提案されているところに意義を認めることができる。

8.2 η–μ分布

κ–μ分布ではクラスタ毎のフェージング環境を安定した波が強い（仲上・ライス分布）としたが、**η–μ分布**ではこの部分をより深いフェージングが生まれる仲上・ホイト分布（q分布）にしている。式形は省略するが①式の構造の範疇にある。

このように見てくると、クラスタ部分の確率分布をどうするかで、様々な分布が考えられる。そして、既に多くの検討がなされていると思うので、新しいモデルを提案しようとする場合には十分な調査が必要である。

9．むすび

伝搬モデルに焦点を当て、多変量正規分布から生まれる様々な確率分布を概観した。伝搬モデルに求められることは「不易流行」、仲上三分布に代表される基礎を知り、次世代無線システム

のニーズに活かすことである。従来より、伝搬モデルには物理的な意味づけが大切にされ、かつ、それを簡易に表現するモデルが求められてきた。近年、演算能力の向上や AI の力によって、簡易であることは必ずしも必須ではなくなっているが、基礎が大事であることは言うまでもない。

電波伝搬モデルでは、この系譜に属さない、あるいは少し離れたところに位置する確率分布も多い。対数正規分布、ワイブル分布、あるいは、重畳分布（分布のパラメータが確率分布する分布: Loo 分布、Suzuki 分布、K 分布など）、複合分布（様々な確率分布が発生確率の重みで足し合されている）などである。これらの分布については、[1], [2]や[3]で取り上げているので、併せて見てほしい。ここでは、アレーアンテナ受信への適用を意識して確率変数がベクトルで表される多変量分布を取り上げたが、送受信にアレーアンテナが用いられる MIMO では、これが行列表現になって、扱いの複雑さが増す。MIMO、特にその相関行列の固有値の確率分布については、[3]の８章で、詳しく解説しているので、必要なときはそこを見てほしい。

謝辞　本レポートをまとめる動機、及び、本資料中の多変量レイリー分布については東京科学大学特別研究員・北陸先端科学技術大学院大学名誉教授松本正氏との議論が大変有益であった。同氏に対して深甚の謝意を表す。

参考文献

[1] 唐沢好男, *（改訂）ディジタル移動通信の電波伝搬基礎*, コロナ社, 2016.
[2] 唐沢好男, *無線通信物理層技術へのアプローチ*, コロナ社, 2021.
[3] 唐沢好男, *電波伝搬モデルの基礎：確率分布と統計的推定*, ネット公開私製本, 2025. https://www.awcc.uec.ac.jp/radio3/ronbun/TR-YK-078_Probability_Distributions.pdf
[4] 仲上稔, “位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究（その２）,”電気通信学会雑誌, no. 202, pp. 17-27, 1940.
[5] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” Bell System Tech. Jour. (BSTJ), vol. 23, no. 3, pp. 282-332. 1994, and vol. 24, no. 1, pp. 46–156, 1945.
[6] 奥井重彦, *電子通信工学のための特殊関数とその応用*, 森北出版, pp. 154-157, 1997.
[7] 仲上稔、佐々木哲夫、”位相が任意の範囲に於て不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する理論的考察、”電気通信学会雑誌、No. 228, pp. 205-213, 1942.
[8] R.S. Hoyt, "Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate," Bell Sys. Tech. Jour. (BSTJ), vol. 26, 2, pp. 318-359, 1947.
[9] M. Nakagami, “On the intensity distribution [ここに q 分布の式が入る] and its application to signal statistics,” Radio Science Journal of Research NBS/USNC-URSI, vol. 68D, o. 9, pp. 995-1003, 1964.
[10] 仲上稔, “短波によるフェージングの統計的性質,”電気通信学会雑誌, no. 239, pp. 145-150, 1943.
[11] M. Nakagami, “The m-distribution; A general formula of intensity distribution of rapid fading,” in W. C. Hoffman, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, Pergamon Press, pp. 3-36, 1960.
[12] N. C. Beaulieu, and K. T. Hemachandra, “Novel simple representations for Gaussian class multivariate distributions with generalized correlation,” IEEE Trans. Info. Theory, vol. 57, no. 12, pp. 8072-8083, 2011.
[13] T. Matsumoto, A. Zribi, R. Asvadi, E. Dupraz, and W. Lin, “Two-stage successive Wyner-Ziv lossy forward relaying for lossy communications: Rate-distortion and outage probability analyses,” IEEE Trans. Vehicl. Technol., vol.78, no. 08, pp. 11394-11410, 2024.

[14] W. B. Davenport and W. L. Root, *An introduction to the theory of random signals and noise*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1987（1958 年発行の復刻版）.
[15] M. D. Yacoub, "The κ–μ distribution and the η–μ distribution," IEEE Antennas Propag. Mag., vol. 49, no. 1. pp. 68-81, 2007.

付録　3変量レイリー分布の PDF（⑲式）の導出と検証

出発点は 6 変量正規分布。

$$f_{XY}\left(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^3 \left|\Sigma\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\right)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$f_{X_i}\left(x_i\right) = f_{Y_i}\left(y_i\right) = N\left(0, \sigma_i^2\right) \quad \left(i = 1,\ 2,\ 3\right)$$

$$\Sigma = \left\langle \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1x_2 & x_1y_2 & x_1x_3 & x_1y_3 \\ y_1x_1 & y_1^2 & y_1x_2 & y_1y_2 & y_1x_3 & y_1y_3 \\ x_2x_1 & x_2y_1 & x_2^2 & x_2y_2 & x_2x_3 & x_2y_3 \\ y_2x_1 & y_2y_1 & y_2x_2 & y_2^2 & y_2x_3 & y_2y_3 \\ x_3x_1 & x_3y_1 & x_3x_2 & x_3y_2 & x_3^2 & x_3y_3 \\ y_3x_1 & y_3y_1 & y_3x_2 & y_3y_2 & y_3x_3 & y_3^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$a_i = x_i + jy_i = r_i \exp\left(j\phi_i\right)$$

$$\rho_{ij}\left\{= \left|\rho_{ij}\right| \exp\left(j\varphi_{ij}\right)\right\} = \frac{\left\langle a_i^* a_j \right\rangle}{2\sigma_i\sigma_j}$$

$$= \frac{1}{2\sigma_i\sigma_j}\left\{\left\langle x_ix_j\right\rangle + \left\langle y_iy_j\right\rangle + j\left(\left\langle x_iy_j\right\rangle - \left\langle x_jy_i\right\rangle\right)\right\} \qquad \left(i, j = 1,\ 2,\ 3\right)$$

これ以降、相関係数ρ_{ij}は実数、$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ として定式化を行う。（変数の分散の考慮は最後に変数変換で行う。相関係数の位相φは受信処理で調整できるので実数のままで行う）

相関係数実数　$\rightarrow \left\langle x_ix_j\right\rangle = \left\langle y_iy_j\right\rangle = \rho_{ij}$,　$\left\langle x_iy_j\right\rangle = -\left\langle y_jy_i\right\rangle = 0$

相関行列 $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 & c \\ b & 0 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a=\rho_{12} \\ b=\rho_{13} \\ c=\rho_{23} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \left(1-a^2\right)^2+\left(1-b^2\right)^2+\left(1-c^2\right)^2 \\ &\quad +2\left\{2abc\left(1-a^2-b^2-c^2+abc\right)+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-1\right\} \\ &= \left(1-a^2-b^2-c^2+2abc\right)^2 \equiv \Delta^2 \\ \Delta &= 1-a^2-b^2-c^2+2abc \end{aligned}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1-c^2 & 0 & bc-a & 0 & ac-b & 0 \\ 0 & 1-c^2 & 0 & bc-a & 0 & ac-b \\ bc-a & 0 & 1-b^2 & 0 & ab-c & 0 \\ 0 & bc-a & 0 & 1-b^2 & 0 & ab-c \\ ac-b & 0 & ab-c & 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & ac-b & 0 & ab-c & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$f_{XY}\left(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^3|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^3\Delta}\exp\left[\frac{-1}{2\Delta}\left\{\left(1-c^2\right)\left(x_1^2+y_1^2\right)+\left(1-b^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)+\left(1-a^2\right)\left(x_3^2+y_3^2\right)\right.\right. \\ &\left.\left.+2\left(bc-a\right)r_1r_2\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)+2\left(ac-b\right)r_1r_3\cos\left(\phi_1-\phi_3\right)+2\left(ab-c\right)r_2r_3\cos\left(\phi_2-\phi_3\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

<u>変数変換</u>

$$x_i = r_i\cos\phi_i,\ y_i = r_i\sin\phi_i\ \ (i=1,2,3)$$

$$J = \left|\frac{\partial\left(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3\right)}{\partial\left(r_1,\phi_1,r_2,\phi_2,r_3,\phi_3\right)}\right| = r_1r_2r_3$$

$$\begin{aligned} f_{R\Phi}\left(r_1,r_2,r_3,\phi_1,\phi_2,\phi_3\right) &= \frac{r_1r_2r_3}{\left(2\pi\right)^3\Delta}\exp\left[\frac{-1}{2\Delta}\left\{\left(1-c^2\right)r_1^2+\left(1-b^2\right)r_2^2+\left(1-a^2\right)r_3^2\right.\right. \\ &\left.\left.+2\left(bc-a\right)r_1r_2\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)+2\left(ac-b\right)r_1r_3\cos\left(\phi_1-\phi_3\right)+2\left(ab-c\right)r_2r_3\cos\left(\phi_2-\phi_3\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

位相変数消去のための周辺化

$$f_R(r_1,r_2,r_3)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{R\Phi}(r_1,r_2,r_3,\phi_1,\phi_2,\phi_3)\,d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3$$

$$=\frac{r_1r_2r_3}{(2\pi)^3\Delta}\exp\left[\frac{-1}{2\Delta}\left\{(1-c^2)r_1^2+(1-b^2)r_2^2+(1-a^2)r_3^2\right\}\right]$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[\frac{-1}{\Delta}\left\{(bc-a)r_1r_2\cos(\phi_1-\phi_2)+(ac-b)r_1r_3\cos(\phi_1-\phi_3)\right.\right.$$

$$\left.\left.+(ab-c)r_2r_3\cos(\phi_2-\phi_3)\right\}\right]d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3$$

$$\alpha=\frac{(a-bc)r_1r_2}{\Delta},\ \beta=\frac{(b-ac)r_1r_3}{\Delta},\ \gamma=\frac{(c-ab)r_2r_3}{\Delta}$$

とおき、積分の中の｛　｝部分は

$$\alpha\cos(\phi_1-\phi_2)+\beta\cos(\phi_1-\phi_3)+\gamma\cos(\phi_2-\phi_3)$$
$$=(\alpha\cos\phi_2+\beta\cos\phi_3)\cos\phi_1+(\alpha\sin\phi_2+\beta\sin\phi_3)\sin\phi_1+\gamma\cos(\phi_2-\phi_3)$$
$$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\phi_2-\phi_3)}\cos(\phi_1+\Delta\phi)+\gamma\cos(\phi_2-\phi_3)$$

であるので、積分部分は

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\alpha\cos(\phi_1-\phi_2)+\beta\cos(\phi_1-\phi_3)+\gamma\cos(\phi_2-\phi_3)\right\}d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\phi_2-\phi_3)}\cos(\phi_1+\Delta\phi)+\gamma\cos(\phi_2-\phi_3)\right\}d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\gamma\cos(\phi_2-\phi_3)\right\}\left[\int_0^{2\pi}\exp\left\{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\phi_2-\phi_3)}\cos(\phi_1+\Delta\phi)\right\}d\phi_1\right]d\phi_2 d\phi_3$$

$$\left(I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta\right)$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\gamma\cos(\phi_2-\phi_3)\right\}I_0\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\phi_2-\phi_3)}\right)d\phi_2 d\phi_3$$
$$=(2\pi)^2\int_0^{2\pi}\exp\{\gamma\cos\phi\}\,I_0\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\phi}\right)d\phi$$

となる。整理すると、

$$f_R(r_1,r_2,r_3)=\frac{r_1r_2r_3}{2\pi\Delta}\exp\left[\frac{-1}{2\Delta}\left\{(1-c^2)r_1^2+(1-b^2)r_2^2+(1-a^2)r_3^2\right\}\right]$$
$$\times\int_0^{2\pi}\exp(\gamma\cos\phi)\,I_0\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\phi}\right)d\phi$$

となる。

ここまでは、

$$\left\langle X_i^2 \right\rangle = \left\langle Y_i^2 \right\rangle = 1 \;\rightarrow\; \left\langle R_i^2 \right\rangle = 2$$

としてきた。ここからは、強度を一般化し

$$\left\langle X_i^2 \right\rangle = \left\langle Y_i^2 \right\rangle = \sigma_i^2 \;\rightarrow\; \left\langle R_i^2 \right\rangle \equiv \Gamma_i = 2\sigma_i^2$$

とする。導出式の r_i^2 を r_i^2/σ_i^2 に置き換え、かつ、変数変換のヤコビアン $J=1/(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$を掛けて書き直すと目的の式⑲を得る。（残念ながら位相の積分が一つ残る）

変量 r_3 が r_1 と r_2 に対して独立であれば、$b\,(=\rho_{13}) = c\,(=\rho_{23}) = 0$ なので、

$$f_R(r_1,r_2,r_3) = \frac{8r_1r_2r_3}{(1-a^2)\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}\exp\left[-\frac{1}{1-a^2}\left\{\frac{r_1^2}{\Gamma_1}+\frac{r_2^2}{\Gamma_2}+(1-a^2)\frac{r_3^2}{\Gamma_3}\right\}\right] I_0\left\{\frac{2ar_1r_2}{(1-a^2)\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}\right\}$$
$$= f_{R12}(r_1,r_2)\,f_{R3}(r_3)$$

$$f_{R12}(r_1,r_2) = \frac{4r_1r_2}{(1-a^2)\Gamma_1\Gamma_2}\exp\left\{-\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{r_1^2}{\Gamma_1}+\frac{r_2^2}{\Gamma_2}\right)\right\} I_0\left\{\frac{2ar_1r_2}{(1-a^2)\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}\right\}$$

$$f_{R3}(r_3) = \frac{2r_3}{\Gamma_3}\exp\left(-\frac{r_3^2}{\Gamma_3}\right)$$

となり、２変量レイリー分布⑰と１変量レイリー分布の積になる。

分布式の妥当性を選択合成ダイバーシチのシミュレーションによって確認する。

シミュレーション

１）等平均電力：$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$（$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1/2$）の有相関３変量複素正規分布変数（$\boldsymbol{a}$; a_1～a_3）を、無相関３変量複素正規分布変数（$\boldsymbol{b}$; b_1～b_3）より、以下の式で生成する（乱数試行 1,000,000 回）。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}^{1/2} \boldsymbol{b}$$

２）３ブランチの中の最大値を選び、この累積分布を求める

数値計算

$F_{SD}(r) = \int_0^r\int_0^r\int_0^r f_R(r_1,r_2,r_3)\,dr_1dr_2dr_3$　を計算する（周辺化のための位相の１成分も入れて４重積分）。

結果

下図に示すように、計算値とシミュレーション結果には良好な一致が見られ、導出式の妥当性が確認できる。

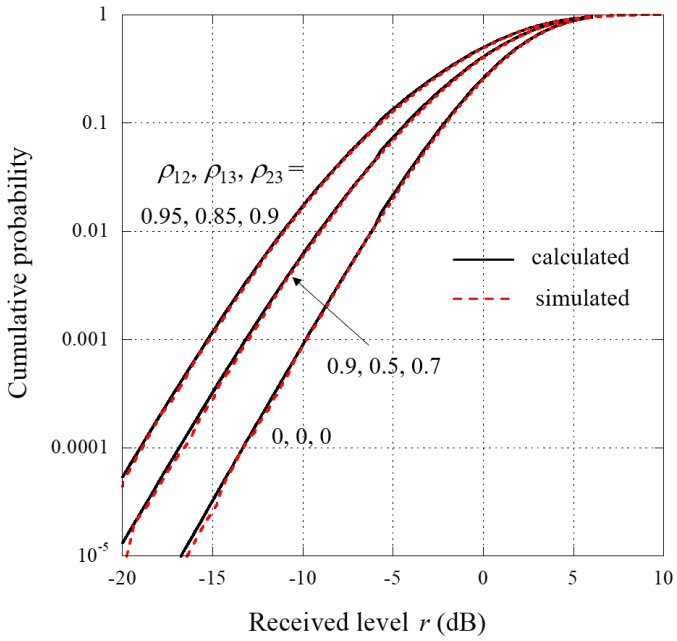


図　変量レイリー分布環境における選択合成ダイバーシチの受信強度

読者の皆さんへ
本レポートはネット公開私製本「電波伝搬モデルの基礎：確率分布と統計的推定」の補足資料になっています。