

ランダムウォーク視点からの伝搬モデル確率分布

～ハンケル変換型特性関数（HCF）の働き～

本レポートは、フェージング分布を「複素平面上のランダムウォーク」として捉え直し、移動伝搬モデルに現れる主要な確率分布の構造を統一的に理解することを目的とする。特に、仲上稔氏が提案した三つの分布を中心に、ベクトル和のノルムを扱う解析手段としてのハンケル変換型特性関数（HCF）がどのように機能するかを整理する。

1. はじめに（目的と背景）

本レポートは、マルチパス伝搬モデルに現れる主要な確率分布（レイリー分布、仲上・ライス分布、仲上m分布など）をランダムウォークの動作に対比させ、ハンケル変換型特性関数 (Hankel-transform-type characteristic function: HCF^注) を解析手段としてその構造を明らかにする。

HCF は多次元ベクトルのノルム（距離）の分布を求めるのに適しており、20 世紀初頭、Karl Pearson が先導したランダムウォーク問題（酔歩問題、ブラウン運動など）の解析手段として発展し、1930 年代に理論体系が確立している。一方、1940 年以降、我が国の仲上稔や米国の S. O. Rice などによって、無線通信におけるフェージングのモデル構築が進められ、その際、HCF の手法が大いに活用されている[1]-[3]。HCF は多次元空間のベクトルノルム解析を対象にする数学手法であるが、特に 2 次元空間でのランダムウォークと対応関係が良いフェージングの確率分布の解析にも適している。図 1 にランダムウォークと電波信号合成の同一性の例を示す。同図(a) は平面上を i 歩目の歩幅を r_i として、一步ごと、任意の方向に 4 歩進んだ図、(b) は、同一周波数で位相のみが一様に分布する各振幅 r_i の電波の合成を示している。(周波数は異なってもよいが、その場合は時間変動する合成信号の包絡線の分布になる)。ランダムウォークの場合、最終点までの距離はベクトル和の絶対値（＝ノルム）、電波の場合は複素振幅信号の和の絶対値（＝振幅）であり、数学的に同じ扱いができることがわかる。レイリー分布や仲上・ライス分布など大部分の分布は 2 次元空間上に現れるが、仲上 m 分布ではそれが多次元になる。

このレポートの主な目的は、ランダムウォークとの対比で伝搬モデルに現れる確率分布の構造を理解することにあり、導出手法を学ぶということではない。その目的であれば、多変量正規分布からのアプローチが素直であり、それについては別レポート[4]を見てほしい。また、HCF を移動伝搬問題に応用する例は[5]にまとめている。なお、HCF をより深く学ぶためには、数学の専門書[6], [7]がある。

注) このレポートではハンケル変換型特性関数の簡略表現として HCF を使っている。ただし、HCF は専門用語として一般的ではないので、このレポート内でのみ通用すると思っしてほしい。ちなみに、ハンケル変換の厳密な適用範囲は、ベッセル関数を研究した Harman Hankel に由来してベッセル関数を核とする変換（2 次元でのフーリエ変換）を言うが、ハンケル変換型（Hankel-transform-type）は多次元空間への適用も許容されている。

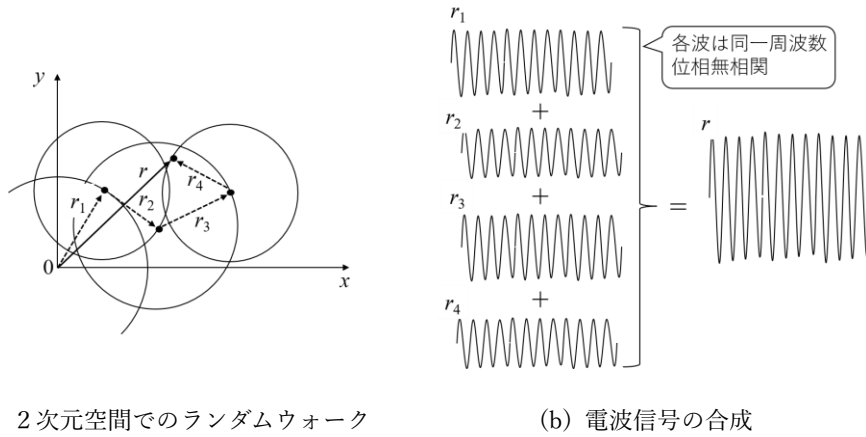


図1 ランダムウォークと電波信号合成のアナロジー

2. ハンケル変換型特性関数 (HCF) の基礎

特性関数とは、確率分布をフーリエ空間に移す変換であり、この空間では、確率変数に対する畳み込みが、特性関数の積として表される。確率変数の和の分布の計算を容易にする手法である。特性関数の最も一般的な形はフーリエ変換型で、確率変数 X の確率密度関数 (PDF) を $f(x)$ とすると特性関数 $g_{FCF}(t)$ は以下の式で表される。

$$g_{FCF}(k) = \langle e^{ikr} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jkr) f(r) dr \quad (1)$$

この変換はいかなる分布に対しても適用できる。それに対して、この後詳しく述べるハンケル変換型特性関数 (HCF) は「 d 次元球対称ベクトルのノルム (距離) $R = \|\mathbf{X}\|$ の分布を扱うための変換」であり、特に $d \geq 2$ のときに本領を発揮する。 d 次元球対称ベクトルのノルムとは、ベクトル空間の変数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ に対して

$$R = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_d^2} \quad (2)$$

で与えられるものである。距離は必ず偶対称 (球対称) なので、HCF の核は偶関数 ($\cos, J_0, \sin(z)/z$ のような) になる。

最も基本である 2 次元空間 ($d=2$) の場合から入る。核を J_0 とする 2 種類の特性関数とその逆変換の形を示す。

タイプ 1

$$g_{HCF-1}(k) = \int_0^{\infty} r J_0(kr) f(r) dr$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} k J_0(kr) g_{HCF-1}(k) dk$$

タイプ 2

$$g_{HCF-2}(k) = \int_0^\infty J_0(kr) f(r) dr$$

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) g_{HCF-2}(k) dk$$

歴史的には、タイプ 1 は主に数学の分野（解析学、ランダムウォーク理論）で、タイプ 2 は工学の分野（仲上稔氏の伝搬確率分布構築など）で用いられて来た。タイプ 1 は全ての関数 f （確率分布でなくてもよい）に対しても可逆性が成立するが、タイプ 2 はノルムの分布のような球対称フーリエ変換（radial transformation）への適用に限定される（付録 A 参照）。それゆえ、距離に対応する信号振幅の分布には適用できるが、距離の二乗が変数となる分布（例えば、指数分布）には適用できない（変数変換をすればよいだけなので、活用の仕方によるが）。タイプ 2 は累積分布関数（CDF） $F(r)$ が一重の積分で得られる（導出は付録 B）。電波伝搬などの工学応用では、CDF が大事になり、タイプ 2 にメリットが大きい。故に、本レポートでは、タイプ 2 型の HCF を採用して話を進める。これ以降は $g_{HCF-2} \rightarrow g$ として、次式の積分変換をもちいる（2次元の場合）。

$$\text{特性関数：} \quad g(k) = \int_0^\infty J_0(kr) f(r) dr \quad (3)$$

$$\text{PDF：} \quad f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) g(k) dk \quad (4)$$

$$\text{CDF：} \quad F(r) \left(= \int_0^r f(r) dr \right) = r \int_0^\infty J_1(kr) g(k) dk \quad (5)$$

次に、多次元空間でのハンケル変換型特性関数の一般形を示す（詳細は[6], [7]）。

d 次元等方ベクトルのノルム $\mathbf{X}$ のノルム $R = \|\mathbf{X}\|$ とすると、その球対称特性関数は

$$g(k) = \langle \Omega_d(kR) \rangle \quad (6)$$

$$\Omega_d(x) = \frac{(2x)^{-\nu}}{\Gamma(d/2)} J_\nu(x) \quad \left(\nu = \frac{d}{2} - 1 \right)$$

で与えられる。なお、積分核 Ω_d に関するより一般的な取り扱い、 $\Omega_d(x) = C x^{-\nu} J_\nu(x)$ の形にし、定数係数 C は PDF に戻す最終段階において、正規化操作（積分して 1 になるように係数を決める操作）に含めることにすると、様々な分布に対して幅広い適用が可能になる。本レポートでは、 $d=2$ 以外でこの式を使うのは仲上 m 分布の時であり、その範囲において、(6) に不都合は生じない。

いくつかの d に対するそれぞれの核は

$$d=1 \left(\nu = -\frac{1}{2} \right) \rightarrow \Omega_1 = \frac{2}{\pi} \cos x$$

$$d=2 \left(\nu = 0 \right) \rightarrow \Omega_2 = J_0(x)$$

$$d=3 \left(\nu = \frac{1}{2} \right) \rightarrow \Omega_3 = \frac{2}{\pi} \frac{\sin x}{x}$$

$$d=4 \left(\nu = 1 \right) \rightarrow \Omega_4 = \frac{J_1(x)}{2x}$$

となる。HCF の核の形について 1 次元 ($d=1$) で見ると、(1)式で示したフーリエ変換タイプの核 $e^{jkr} \{=\cos(kx) + j \sin(kx)\}$ に対して奇関数部分 ($\sin$) が消えた形と読める。付録 C に $d=2$ に特化した特性関数の導出を示す。

説明は省くが、 d 次元における特性関数 g と確率密度関数 f の関係は次式で与えられる。

$$g(k) = \int_0^\infty \Omega_d(kr) f(r) dr \quad (7)$$

$$f(r) = r^{d-1} \int_0^\infty k^{d-1} \Omega_d(kr) g(k) dk \quad (8)$$

大事な性質として「全ての次元において、ベクトル変数の和の分布の特性関数はそれぞれの特性関数の積になる」がある ($d=2$ についての導出は付録 D に)。すなわち、夫々のベクトル変数を $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ とすると、 $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ のノルムの確率分布の HCF は

$$g_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(k) = g_{\mathbf{X}}(k) g_{\mathbf{Y}}(k) \quad (9)$$

以下これらの式を使って、具体的な確率分布の構造を見てゆきたい。

3. 二次元空間でのランダムウォークと確率分布

N 波合成の振幅の分布

最も基本となる 2 次元空間 ($d=2$, xy 平面上) でのランダムウォークと対応する確率分布から始めたい。式(3), (4)に従う変換である。平面上の動きに着目するのは、酔っ払いが歩くのは地面の上であり、電波信号も振幅と位相で表される複素平面上 (IQ 平面上) の動きになるからである。図 1 (a)のように、一歩ごとに任意の角度に踏み出すとする。その一歩目の歩幅を r_1 としよう。一歩目の中心からの距離 r の確率分布は、どの方向に動いても距離は r_1 で変わらないのだから、一歩目の距離 (確率変数 R_1) の確率密度関数は

$$f_{R_1}(r) = \delta(r - r_1) \quad (\delta: \text{ディラックのデルタ関数})$$

HCF は(3)式に上式を入れて、以下ようになる。

$$g_{R_1}(k) = J_0(kr_1) \quad (10)$$

同様に N 歩目までの距離を表す確率変数を R_N とすると、

$$R_N = \|\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \cdots + \mathbf{X}_N\| \quad \{\mathbf{X}_i = (R_i \cos \Theta_i, R_i \sin \Theta_i)\}$$

特性関数は(9)式の積性より、 $\mathbf{X}_i$ それぞれのノルムの確率分布の特性関数の積になり Kluyver の式と呼ばれる次式になる。

$$g_{R_N}(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \quad (11)$$

図 1 (b) に示した電波信号の合成信号の振幅 r の分布の特性関数も(11)式と全く同じである。

レイリー分布

全ての歩幅を r_0 、 N 歩目までの距離を r_N とし、その値を $\sqrt{N}$ で割ったものを正規化距離と呼ぶ。さらに、 N を十分大きくしてゆくと正規化距離の確率分布は一定の分布に収束する。この距離はスケーリング極限距離 (scaling limit) と呼ばれる。以下、このスケーリング極限距離に着目する。

特性関数は以下である (右辺の導出は付録 E に示す)。

$$g(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left\{ J_0 \left(k \frac{r_0}{\sqrt{N}} \right) \right\}^N = \exp \left(-\frac{r_0^2 k^2}{4} \right) \quad (12)$$

確率密度関数 f は

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) \exp \left(-\frac{r_0^2 k^2}{4} \right) dk = \frac{2r}{r_0^2} \exp \left(-\frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (13)$$

となる。積分の解法にはベッセル関数の積分公式

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} J_0(bx) dx = \frac{1}{2a} \exp \left(-\frac{b^2}{4a} \right) \quad (a > 0)$$

を使っている。(注：この後にも出てくる種々のベッセル関数の積分公式は[8], [9]にある)。(13)式の最終辺で、 $r_0^2 = 2\sigma^2$ とすれば、電波伝搬でお馴染みのレイリー分布になる。

冒頭にも述べたが、このレポートでは、それぞれの分布の構造をランダムウォーク視点から見直そうとするものであって、分布式の簡易な導出を示すものではない。レイリー分布式の導出が目的であれば、独立 2 変量正規分布から求める方法 (電波伝搬の教科書 ([10]等) に述べられている) が最も素直である。

仲上・ライス分布

仲上・ライス分布をランダムウォーク視点で見よう。中心を xy 平面の原点にとる。原点から距離 a 離れたところにランダムウォークの出発点を置く(方向は任意で良い)。歩幅を $r_0/\sqrt{N}$ とし、原点とスケーリング極限距離までの長さを r とする。この構造は、レイリー分布を得た状態に歩幅 a の一歩が加わったと等価である。故に特性関数はこの一歩の分 g_A を積にして、次式となる。

$$g(k) = g_A(k)g_{\text{Rayleigh}}(k) = J_0(ka) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad (14)$$

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(ka) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \quad (15)$$

ベッセル関数の積分公式

$$\int_0^\infty \exp(-px^2) J_\nu(2ax) J_\nu(2bx) x dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{p}\right) I_\nu\left(\frac{2ab}{p}\right) \quad (p > 0)$$

を使って、お馴染みの仲上・ライス分布式を得る。

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) \quad (16)$$

このように、ランダムウォークにおいて出発点が中心でない(=基準点から離れている)場合、あるいは、平均値が 0 でない正規分布由来の確率分布は「非心 (noncentral)」と呼ばれる。レイリー分布が中心型 (central) の代表とすれば、仲上・ライス分布は非心型の代表になる。仲上・ライス分布が生まれた経緯やより簡易な導出方法については[10]にまとめているので、それを見てほしい。

定振幅 N 波+レイリー分布

伝搬モデルにおける仲上・ライス分布は、1 定常波と 1 不規則波の合成信号の振幅の分布で、見通し内フェージング環境を代表する。粗面反射のように反射波の成分が鏡面反射成分(コヒーレント成分)と不規則反射成分(インコヒーレント成分)に分けられる場合には、受信信号は直接波成分とコヒーレント成分の 2 定常波と 1 不規則波の合成になる。さらには、レイトレーシング結果に見られるように、ある程度の強さの波が数波、それにまとめてレイリー分布する弱い波の一群があるという環境が想定される。これらは N 波 + 1 不規則波の合成振幅の分布になる。 N 波の信号の振幅をそれぞれ r_i ($i=1, 2, \dots, N$)、不規則波の平均電力を $2\sigma^2$ とすると、この特性関数は次式で与えられる。

$$g(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad (17)$$

N が 2 以上では、これを逆変換式(4)に入れても積分が解けることは無いが、PDF も CDF も一重積分だけで求められるメリットは大きい。

仲上・ホイト分布

これまでの分布は、2次元平面において、 x 軸方向と y 軸方向に均一に歩を進める等方性であった。仲上・ホイト分布は x 軸方向と y 軸方向で歩幅が異なる非等方ランダムウォークである。

2次元のランダムウォークのスケーリング極限位置ベクトル $\mathbf{X}$ は

$$\mathbf{X} \{=(X, Y)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \quad \{\mathbf{X}_i = (X_i, Y_i)\} \quad (18)$$

$$X \sim N(0, \sigma_x^2), Y \sim N(0, \sigma_y^2), \langle XY \rangle = 0$$

$$R = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

この R の分布が仲上・ホイト分布である。以下、この分布の導出を行う。 $\mathbf{X}=(X,Y)$ のベクトル特性関数は、付録 C に述べているように、次式となる。

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \langle e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2 k_x^2 + \sigma_y^2 k_y^2)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}k^2(\sigma_x^2 \cos^2 \theta + \sigma_y^2 \sin^2 \theta)\right\} \end{aligned}$$

ハンケル変換型特性関数は k の向きの平均をとったものであるので

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(k, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)k^2}{4}\right\} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)k^2}{4} \cos 2\theta\right\} d\theta \\ &= \exp\left\{-\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)k^2}{4}\right\} I_0\left\{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)k^2}{4}\right\} \end{aligned} \quad (19)$$

上式において、積分の解法は下記の変形ベッセル関数の定義式を用いている。

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \phi} d\phi$$

振幅変数 R の確率密度関数は、(4)式に(19)式の特性関数を代入し、

$$\begin{aligned} f(r) &= r \int_0^\infty k J_0(kr) \exp \left\{ -\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) k^2}{4} \right\} I_0 \left\{ \frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) k^2}{4} \right\} dk \\ &= \frac{(1+q^2)r}{q\Omega} \exp \left\{ -\frac{(1+q^2)^2 r^2}{4q^2\Omega} \right\} I_0 \left\{ \frac{(1-q^4)r^2}{4q^2\Omega} \right\} \\ q &= \sqrt{\frac{\min(\sigma_x^2, \sigma_y^2)}{\max(\sigma_x^2, \sigma_y^2)}} \quad (0 < q \leq 1), \quad \Omega = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (20)$$

上式の積分の解法は、ベッセル関数と変形ベッセル関数の積分公式（下記）を利用した。

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp(-px^2) J_0(2ax) I_0(2bx^2) x dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{p^2 - b^2}} \exp \left(-\frac{pa^2}{p^2 - b^2} \right) I_0 \left(\frac{a^2 b}{p^2 - b^2} \right) \quad (p > a > 0) \end{aligned}$$

仲上・ホイト分布にも、仲上・ライス分布と同様に、誕生の経緯や分布の呼び名の由来がある。また、 x 軸と y 軸の変動に相関をもたせたより一般的な分布形もある（それも含めて、仲上・ホイト分布と呼ばれている）。詳細は、[4]を見てほしい。

式からわかるように、 q が分布の形を決めるパラメータであり、 $q=1$ でレイリー分布、 $q=0$ で半ガウス分布（＝平均値 0 の正規分布の正側のみを変数に持つ分布）になる。故に、レイリー分布でモデル化されるレイリーフェージングより深い変動を有する伝搬環境のモデルに用いられている。具体的には、レイリー分布の平均電力に揺らぎがある環境、あるいは、フェージング変動がある環境をリレーで繋ぐようなときのモデルである。しかし、物理空間あるいは信号空間（ IQ 平面）上で、直交軸に対して非等方になる現象は考えにくく、具体的な適用に際しては、物理的な意味の考察が必要になる。

4. 多次元空間でのランダムウォークと電波伝搬確率分布

多次元空間でのランダムウォークにおける到達距離の確率分布を調べる。3次元空間であれば、ジャングルジムのような構造を思い描けるが4次元以上は絵に描きにくい。しかし、数学上は次元数に制限はない。通信では、スペースダイバーシチのように素子アンテナ毎の受信信号の変動

が独立であれば、複素平面単位での次元拡張として扱える。ここでは、仲上m分布（カイ分布）を中心に述べる。

仲上m分布

仲上m分布が生まれた経緯は最後に述べるが、ここでは、多次元空間のランダムウォーク視点で説明を行う。

状況設定：次元 d 、ステップ幅 r_0 、方向：等方一様、
スケーリング極限ベクトル

$$\mathbf{X} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \right\}, \quad \mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{id}), \quad R = \|\mathbf{X}\| \quad (21)$$

この R の分布が仲上m分布になる。

中心極限定理より、各直交軸方向での位置は、等方一様で平均値 0、分散 $\sigma^2 = r_0^2/d$ の正規分布になる。特性関数は

$$g(k) = \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \rangle = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right), \quad \left(k = \|\mathbf{k}\|, \sigma^2 = \frac{r_0^2}{d}\right) \quad (22)$$

となり、 d に因らない形。PDF は

$$\begin{aligned} f(r) &= r^{d-1} \int_0^\infty k^{d-1} \Omega_d(kr) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \\ &= \frac{r^{d-1-\nu}}{2^\nu \Gamma(d/2)} \int_0^\infty k^{d-1-\nu} J_\nu(kr) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \end{aligned} \quad (23)$$

変数 k の累乗の $d-1-\nu$ は $\nu=d/2-1$ より、 $d-1-\nu=\nu+1$ と置きかえることができ、積分部分はベッセル関数の積分公式

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-ax^2} J_\nu(bx) dx = \frac{b^\nu}{(2a)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$$

を使って積分を解くと、積分部分は

$$\int_0^\infty k^{\nu+1} J_\nu(kr) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk = \frac{r^\nu}{\sigma^{2(\nu+1)}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

となり、次式の確率密度関数を得る。

$$f(r) = \frac{1}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2) \sigma^d} r^{d-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (24)$$

$d = 2m$, $d\sigma^2 = \langle R^2 \rangle = \Omega$ と置くと、下記でお馴染みの仲上m分布の式になる。

$$f(r) = \frac{2m^m}{\Gamma(m) \Omega^m} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad (25)$$

ここでは、多次元空間のランダムウォークから仲上m分布を導出した。それゆえ、次元数 d は整数であり、故にパラメータ $m (=d/2)$ も離散的に与えられる。しかし、仲上によって見出されたこの分布は、短波帯電波のフェージングによってであり、パラメータ m にはそのような制約はなく、 $m \geq 0.5$ の任意の実数としてよい[11]。 $m=0.5$ で半ガウス分布、 $m=1$ でレイリー分布になり、 m の値の増加とともに分布の幅が狭くなる。仲上・ライス分布のような浅いフェージングを代表する環境からレイリー分布より深い落ち込みを有する分布（例えば、仲上・ホイト分布）まで、幅広く近似できることから、フェージングモデルの確率分布として重宝されている。しかし、仲上・ホイト分布同様、2次元空間（ IQ 複素平面上）に現れるフェージングのモデルとして採用する場合には、物理的意味をよく考える必要があろう。

仲上m分布が生まれた経緯や他の分布との関係については[10]に詳しくまとめているので、そこを見てほしい。この後述べるカイ分布との歴史的な関係についてはカイ分布の項で述べる。

カイ分布

分布の名前としてはカイ二乗分布の方がよく知られているが、確率変数 Z がカイ二乗分布だとすると、 $Z=R^2$ で与えられる R の分布がカイ分布である。独立な標準正規分布変数 X_i に対して、

$$R = \sqrt{\sum_i^d X_i^2}, \quad X_i \sim N(0,1), \quad \langle X_i X_j \rangle = 0 \quad (i \neq j) \quad (26)$$

であるとき、自由度 d のカイ分布と呼ばれる。これは、前述の仲上m分布の導出において、 $\sigma^2=1$ としたものであり、分布の形は以下である。

$$f(r) = \frac{1}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2)} r^{d-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \quad (27)$$

この説明からわかるように、変数の大きさの正規化の部分を除いて、仲上m分布とカイ分布は同じである。カイ二乗分布が1900年にKarl Pearsonによって導かれており、カイ分布はその平方根の分布として自然に定義されている（カイ分布という名前が登場するのは1920～1930年代らしい）。故に数学分野では、20世紀前半には、カイ分布は知られていたのだが、畑違いの工学

分野から、フェージングデータをよく近似する分布として 1943 年に仲上 m 分布が編み出された。誕生からしばらく、仲上は m 分布の物理的意味に悩んでいたが、1960 年の英文論文[12]では、複数の i.i.d. レイリー変数の二乗和の平方根が m 分布になることを述べている。形が昔からあったものと同じだからと言って、仲上 m 分布の歴史的価値が落ちるわけではない。カイ分布はパラメータ d が整数である数学モデルであるのに対して、仲上 m 分布は対応するパラメータ m にそのような条件を付けず、かつ、 m が 0.5 以上と言う別の条件を加えたフェージング環境を表現するモデルであるからである。

その他の分布

以下、ノルムの分布ではない（すなわち $Z=R^2$ の分布である）カイ二乗分布、ガンマ分布、そしてノルムの分布である非心カイ分布、その二乗である非心カイ二乗分布へと話を続けたいと思ったが、ランダムウォークとの関連がだんだん複雑になって、役に立つまとめ方にはならないと言う思いに至った。故に、このレポートではここまでとする。繰り返し述べてきたように、ここでは取り上げなかった分布も、多変量正規分布由来の分布として[4]で取り上げているので、導出等についてはそちらを見てほしい。

参考文献

- [1] 仲上稔, “位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究 (その 2),” 電気通信学会雑誌, no. 202, pp. 17-27, 1940.
- [2] 仲上稔, 佐々木哲夫, “位相が任意の範囲に於て不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する理論的考察,” 電気通信学会雑誌, No. 228, pp. 205-213, 1942.
- [3] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” Bell System Tech. Jour. (BSTJ), vol. 23, no. 3, 1944, and vol. 24, no. 1, pp. 46–156, 1945.
- [4] 唐沢好男, “多変量正規分布とその仲間たち: ~電波伝搬モデル視点での系統的整理~,” 技術レポート, TR-YK-090, 2026.
- [5] 唐沢好男, “ハンケル変換形特性関数を用いた受信強度確率分布の計算法: ~伝搬環境のレイトレーシング: その後どうする? ~,” ネット公開私製本「電波伝搬モデルの基礎: 確率分布と統計的推定」; Appendix 1, 2025.
- [6] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999.
- [7] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.
- [8] 奥井重彦, *電子通信工学のための特殊関数とその応用*, 森北出版, pp. 154-157, 1997.
- [9] 森口繁一他, *岩波数学公式 III*, 岩波書店, 1993. (新装版)
- [10] 唐沢好男, *無線通信物理層技術へのアプローチ (第 3 章)*, コロナ社, 2021.
- [11] 仲上稔, “短波によるフェージングの統計的性質,” 電気通信学会雑誌, no. 239, pp. 145-150, 1943.
- [12] M. Nakagami, “The m-distribution; A general formula of intensity distribution of rapid fading,” in W. C. Hoffman, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, Pergamon Press, pp. 3-36, 1960.

付録 A ハンケル変換型特性関数と確率密度間の変換の可逆性（2次元空間（ $d=2$ ）の場合）

三つの関数 f と g と h を考え、以下の関係で結ばれると定義する。

$$\text{定義 1 : } f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) g(k) dk$$

$$\text{定義 2 : } g(k) = \int_0^\infty J_0(kr) h(r) dr$$

定義 1 式の右辺から変形してゆく。

$$\begin{aligned} & r \int_0^\infty k J_0(kr) g(k) dk \\ &= r \int_0^\infty k J_0(kr) \left[\int_0^\infty J_0(kr') h(r') dr' \right] dk \\ &= r \int_0^\infty h(r') \left[\int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr') dk \right] dr' \quad (\text{積分順序の入れ替え}) \\ &\quad \downarrow \quad \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr') dk = \frac{1}{r} \delta(r - r') \quad (\text{ベッセル関数の直交性の性質}) \\ &= r \int_0^\infty h(r') \frac{1}{r} \delta(r - r') dr' = h(r) \rightarrow f(r) = h(r) \end{aligned}$$

のようにして元に戻ることが示されたので、可逆性が示されたと思うだろう。そして、それは関数 f が確率分布でなくても任意の関数でこの式の可逆性が成立していると思うであろう。実はそうではないので、さらに詳しい説明が必要になる。

式の展開の途中で用いた式

$$\int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr') dk = \frac{1}{r} \delta(r - r')$$

この関係は公式として存在するわけではない（公式集には出てこない形）。左辺の積分は普通の積分としては収束しない。ただしある条件が満たされれば右辺の形になる。左辺の積分を $U(r, r')$ において、数学的に吟味する。

$$U(r, r') = \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr') dk$$

は任意のテスト関数 $\phi(r)$ に対して、

$$\int_0^\infty U(r, r') \phi(r) r dr = \phi(r')$$

になる。この意味から、

$$U(r, r') = \frac{1}{r} \delta(r - r')$$

と定義されている。このような使われ方をしたときに限って本文(3), (4)式の関係が成立する。フーリエ変換の直交性に関する議論に共通する慎重な扱いの下に成立する。このケースでは、 $f(r)$ が確率分布であって、ノルムが変数のものはすべて適用できる。ただし2次元で議論しているの2次元のランダムウォークに対応する分布であるレイリー分布や仲上・ライス分布などである。指数分布は確率変数がノルムではなくノルムの二乗なので、成立しない。 $(f(r))$ に指数分布を入れるとどのような形で戻るかを試してみるとよい。

付録 B 累積分布関数の導出

$$\begin{aligned} F_R(r) &= \int_0^r f_R(t) dt = \int_0^r \left[t \int_0^\infty g(k) J_0(kt) k dk \right] dt \\ &= \int_0^\infty g(k) k \left[\int_0^r t J_0(kt) dt \right] dk \end{aligned}$$

ベッセル関数の基本積分公式

$$\int_0^r t J_0(at) dt = \frac{r J_1(at)}{a}$$

を使うと、

$$F(r) = r \int_0^\infty g(k) J_1(kr) dk$$

が得られる。このように、累積分布関数が一重積分で得られるのはタイプ2の変換を採用したからであって、タイプ1ではこうはゆかない。

付録 C 2次元 ($d=2$) における特性関数定義式の導出

2次元空間での確率ベクトル $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ を考え、この確率密度関数 (PDF) を $f_X(x_1, x_2)$ とする。特性関数は2次元のフーリエ変換であり次式である。

$$\Phi_X(\mathbf{k}) = \langle e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2)} f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

ここで、 $\mathbf{X}$ が円対称 (回転不変) と仮定する。そうすると、PDF はノルム $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ のみの関数

$$f_X(x_1, x_2) = h(r)$$

の形になる。このとき、特性関数も k のノルム $k = \|\mathbf{k}\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ の関数となり

$$\Phi_X(\mathbf{k}) = \Phi_X(k)$$

である。回転対称なので、 $\mathbf{k}$ の向きは任意に選べるので、計算を簡単にするため

$$\mathbf{k} = (k, 0)$$

と置いてよい（方向を x 軸方向にとる）。ここで、

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi)$$

と置くと、 $\mathbf{k}$ と $\mathbf{X}$ の内積は

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} = k_1 x_1 + k_2 x_2 = \rho x_1 + 0 x_2 = \rho r \cos \theta$$

である。変数変換のヤコビアン $J=r$ とベッセル関数の積分表示

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta$$

を使って書き換えると

$$\Phi_X(k) = \int_0^\infty h(r) r \{2\pi J_0(kr)\} dr$$

となる。ノルム $R=||\mathbf{X}||$ の PDF が $f_R(r)$ であったので、2次元空間 ($d=2$) では

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_X(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta = 2\pi r h(r)$$

となり、 $2\pi r h(r) = f_R(r)$ として代入すると

$$\Phi_X(k) = \int_0^\infty f_R(r) J_0(kr) dr$$

となり、この $\Phi_X(k)$ をハンケル変換型の特性関数 $g(k)$ と定義すれば、本文の(3)式になる。

付録 D ベクトル和の特性関数の積性

独立な2次元ベクトル確率変数 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を考え、 $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$, $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2)$ と置く。それぞれの特性関数は付録Cにも示したように、次式となる。

$$\Phi_X(k) = \langle e^{jk \cdot X} \rangle, \quad \Phi_Y(k) = \langle e^{jk \cdot Y} \rangle$$

確率変数 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ の和を $\mathbf{Z}$ とすると、 $\mathbf{Z}$ のノルムの分布の特性関数は

$$\Phi_Z(k) = \langle e^{jk \cdot Z} \rangle = \langle e^{jk \cdot (X+Y)} \rangle = \langle e^{jk \cdot X} \rangle \langle e^{jk \cdot Y} \rangle = \Phi_X(k) \Phi_Y(k)$$

となり、それぞれの特性関数の積になる。導出の途中で $\langle \cdot \cdot \rangle$ が $\langle \cdot \rangle \times \langle \cdot \rangle$ とできるのは、変数 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ が独立のためである。確率変数 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ を任意の次元にしても、上記の積性はそのまま成立する。

付録 E レイリー分布の特性関数の導出

$$g(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left\{ J_0 \left(k \frac{r_0}{\sqrt{N}} \right) \right\}^N$$

$\{\cdot\}^N$ 部分の自然対数をとれば

$$\log \left\{ J_0 \left(k \frac{r_0}{\sqrt{N}} \right) \right\}^N = N \log \left\{ J_0 \left(k \frac{r_0}{\sqrt{N}} \right) \right\}$$

$$\approx N \log \left(1 - \frac{k^2 r_0^2}{4N} \right) \quad \left(\because J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4} \quad (x \ll 1) \right)$$

$$\approx -\frac{k^2 r_0^2}{4} \quad \left(\because \log(1+x) \approx x \quad (x \ll 1) \right)$$

対数をもとに戻して

$$g(k) = \exp \left(-\frac{r_0^2 k^2}{4} \right) = \exp \left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \right) \quad (r_0^2 = 2\sigma^2)$$

読者の皆さんへ

本レポートは、ネット公開私製本「電波伝搬モデルの基礎：確率分布と統計的推定」の補足資料2になっています。同書の日次ページは [こちら](#)