

レイリー分布ブランチ最大比合成の確率分布について

レイリーフェージング環境においてアレーアンテナによるダイバーシチ合成を行う場合、各ブランチの SN 比は指数分布になる。最大比合成後の SN 比は各ブランチの SN 比の和になるため、目的量の確率分布 (PDF) は指数分布の和の分布になる。和の分布を求めるには特性関数や積率母関数 (MGF) を用いるのが便利であり、その手順も定まっている。それぞれの指数分布の平均値が全て等しい場合や全て異なる場合には確率分布も容易に導かれるが、等しいものが複数のグループで存在するような場合には分布の形が複雑になる。後者のケースでは、CDMA の RAKE 受信をアレーアンテナで行う場合や、解析の都合上から、相関行列の対角成分以外の要素を全て等しい値にする等相関行列 (equal-correlation matrix ; EC 行列) を用いる場合に現れる。本レポートはこれらの分布式を整理してまとめている。

1. 問題設定

SN 比が指数分布する、すなわち電圧次元の出力がレイリー分布するブランチ i の SN 比の確率密度関数を次式で与える。

$$f_i(\gamma_i) = \frac{1}{\Gamma_i} \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\Gamma_i}\right)$$

ここで、 γ_i はブランチ i の SN 比、 Γ_i はその平均値である。

ブランチ数を N とすると、最大比合成 (MRC) 後の SN 比 γ は次式である。

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N$$

個々の分布の積率母関数 MGF $M_i(t)$ は

$$M_i(t) = \langle e^{t\gamma_i} \rangle = \frac{1}{1 - \Gamma_i t} \quad \left(t < \frac{1}{\Gamma_i} \right)$$

なので、 γ の分布の MGF $M(t)$ は、それらの積である次式となる。

$$M(t) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - \Gamma_i t}$$

これを逆変換すれば PDF が得られる。

2. 平均値が全て等しい場合

全ての平均値が等しく Γ_0 であるときは、分布 (PDF: f , CDF: F) は容易に求められ、次式のア

ーラン分布（＝ガンマ分布の形状パラメータを整数に限定した分布）になる。（以下では、アーラン分布も含めて、ガンマ分布と呼ぶことが多い）。

$$f(\gamma) = \frac{\gamma^{N-1}}{(N-1)! \Gamma_0^N} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \quad (1a)$$

$$F(\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma^{i-1}}{(i-1)! \Gamma_0^{i-1}} \quad (1b)$$

PDF が一般のガンマ分布のときは、CDF は特殊関数（不完全ガンマ関数）を含む形になるが、アーラン分布であることによって、有限和の簡易な形になっている。

3. 平均値がすべて異なる場合

平均値が全て異なる場合も MGF の逆変換が解けて次式となる。

$$f(\gamma) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{i=1}^N \frac{\exp(-\gamma / \Gamma_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N \left(\frac{1}{\Gamma_j} - \frac{1}{\Gamma_i} \right)} \quad (2a)$$

$$F(\gamma) = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i^{N-1} \exp(-\gamma / \Gamma_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N (\Gamma_i - \Gamma_j)} \quad (2b)$$

式の形からもわかるように、平均値の中に一組でも値の等しいものがあると上記式での計算ができない。この措置については次節で述べるが、上式そのものは、値が極めて近い場合でも正しい値を示す。そのことは、 $N=2$ で、 $\Gamma_2 = \Gamma_1 + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$ としてみれば、容易に確かめられる。分母が 0 になって計算できないわけであるが、その時は分子も 0 になって、0/0 の形になっているだけである。

平均値が全て異なるようなケースは、素子アンテナの指向性や利得が異なる場合、および、以下に説明するブランチ間が有相関の場合に生まれる。

有相関の場合の基本的な考え方を示す。各ブランチの瞬時出力を以下とする。

$$\mathbf{a}(t) = (a_1(t) \ a_2(t) \ \cdots \ a_N(t))^T$$

この相関行列 Σ を固有値分解する。

$$\Sigma = \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^H \rangle = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^H \quad (\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_N))$$

$\mathbf{E}$ は N 個の固有ベクトルで構成されるユニタリ行列、 $\mathbf{\Lambda}$ は固有値 $\lambda_1 \sim \lambda_M$ を対角成分に持つ対角行列である。このユニタリ行列を用いて、相関の無いブランチ出力ベクトル $\mathbf{b}$ を作る。

$$\mathbf{b}(t) = E^H \mathbf{a}(t) \rightarrow \langle \mathbf{b} \mathbf{b}^H \rangle = \Lambda$$

この変換は直交座標変換である。対象とする最大比合成出力はベクトル $\mathbf{a}$ 同士の内積（に相当する量）である。内積には、直交座標変換によって値は変わらないという性質がある。すなわち、どの時刻においても

$$\gamma(t) \propto \mathbf{a}^H(t) \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}^H(t) \mathbf{b}(t)$$

となり、無相関変動に変換されている $\mathbf{b}$ の出力の最大比合成は出力 $\mathbf{a}$ で行う結果に同じである。直交化されたブランチの出力の平均値はそれぞれの固有値に対応するので、(2)式の Γ_i を λ_i に置き換えればよい。有相関環境においては、固有値はそれぞれに異なる値をもつことが通常である。

4. 平均値が等しい群が複数ある場合

等しい値をもつ組が G 組あり、グループ g のメンバー数（＝ブランチ数）を N_g （次式）、その値を Γ_g とする。

$$\sum_{g=1}^G N_g = N$$

最大比合成後の確率分布の MGF は次式となる。

$$M(t) = \prod_{g=1}^G \left(\frac{1}{1 - \Gamma_g t} \right)^{N_g}$$

ここまではよいが、この後の逆変換が難所である。一般的な意味で、スケールパラメータの異なるガンマ分布の和の分布は閉形式では表せないことが知られている。しかし、ガンマ分布の特殊形であるアーラン分布（＝ガンマ分布の形状パラメータが整数）に限っては以下の形の閉形式が得られている[1]。

$$f(\gamma) = \sum_{g=1}^G \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_g}\right) \sum_{k=0}^{N_g-1} C_{g,k} \gamma^k \quad (3a)$$

$$C_{g,k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \left(\frac{1}{\Gamma_g} - t \right)^{N_g} \prod_{\substack{h \neq g \\ h=1}}^G \left(\frac{1}{1 - \Gamma_h t} \right)^{N_h} \right\} \Bigg|_{t=1/\Gamma_g}$$

$$F(\gamma) = \sum_{g=1}^G \sum_{k=0}^{N_g-1} C_{g,k} \Gamma_g^{k+1} k! \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_g}\right) \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \left(\frac{\gamma}{\Gamma_g} \right)^m \right\} \quad (3b)$$

井上等は[1]とは独立に(2b)式のCDFを同一値ごとにグループ化し、CDF式を導いている[2]。PDFはその微分で得られる。この式も併せて示しておきたい（CDF導出の詳細は[2]に）。

$$f(\gamma) = \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^{N_g} \left\{ \frac{\eta_{g,n}}{\Gamma_g^n (n-1)!} \right\} \gamma^{n-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_g}\right) \quad (4a)$$

$$F(\gamma) = 1 - \sum_{g=1}^G \sum_{k=0}^{N_g-1} \eta_{g,k} Q_{g,n}(\gamma) \quad (4b)$$

$$Q_{g,n}(\gamma) = \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_g}\right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\gamma}{\Gamma_g}\right)^{k-1}$$

$$\eta_{g,n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} \Gamma_g^k \frac{\partial^k \alpha_g}{\partial \Gamma_g^k} \right\}$$

$$\alpha_g = \frac{\Gamma_g^{N-N_g}}{\prod_{\substack{k \neq g \\ k=1}}^G (\Gamma_g - \Gamma_k)}$$

(3)式と(4)式で見かけは異なるが、構造解析により、同一式であることを確認している（AI (Microsoft Copilot)による）。また、(4b)式については、計算機シミュレーション結果との比較でも一致を確認している[2]。(4)式の方が少し計算が楽そうに見えるが、筆者の臆見目かもしれない。近似な算定で良い場合には、(2)式に対して、同一値をわずかにずらして求めることも可能である（微小摂動法；次節で計算例を示すが、誤差は非常に小さい）。

このような同一値がグループで現れる環境は、CDMA（スペクトル拡散信号）のRAKE合成受信をアレーアンテナで行うようなときである。RAKEフィンガー数を3、アンテナ数を4とすれば、グループ数 $G=3$ 、メンバー数 $N_1=N_2=N_3=4$ になる。もう一つの例は次項で述べる相関行列の対角成分以外の相関値を同一値に設定する等相関行列環境である。

5. 等相関行列への応用

空間・周波数・時間領域における受信ブランチ信号間に相関がある場合、伝送特性の把握には相関行列の固有値解析、あるいは固有ベクトルで構成されるユニタリ行列による無相関変動への変換が行われる。このような有相関フェージング環境の場合、相関行列の各要素は相関特性に従った多様な値をもち、結果として固有値も異なった値になるのが通常である。しかし、伝搬モデルとしては不自然である（＝物理的リアリティがない）が、伝送特性解析上のメリットが大きいため、対角要素以外の成分の値を同じ値にする等相関行列（equal-correlation matrix）がしばしば用いられる。伝送特性劣化の上限や下限を抑えたいと言うような場合に有効である。ここで

は、 N ブランチ信号に対して相関特性が下記で与えられる $N \times N$ の対角行列を考えてみよう。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の固有値は 2 種類、

$$\lambda_1 = 1 + (N-1)\rho \quad (\text{重複度 } 1), \quad \lambda_2 = 1 - \rho \quad (\text{重複度 } N-1)$$

である。前節のモデルにおいて、 $G=2$, $N_1=1$, $N_2=N-1$ になる。確率分布は指数分布とガンマ分布（アーラン分布）の和である。(3)式、あるいは(4)式に、この条件を入れて計算すればよいのではと思うであろう。実際にやってみると実はなかなか難しいと言うことに気づくのである（筆者の体験的感想）。式が面倒ということもあるが、設定条件によって、計算誤差が非常にしやすい形なのである。特に、相関係数をきわめて 1 に近い値（例えば $\rho=0.95$ ）にすると、大きな値の固有値一つと非常に小さい値の複数固有値となり、結果として γ の値が小さいところに誤差が顕著に表れる。故に、ここでは結果が安定して得られる二つの方法を示す。

方法 1：畳み込み積分による数値解析

方法 2：微小摂動法；等しい値のものをわずかにずらし、不等平均値に適用できる(2)式で計算する

方法 1 は固有値が 2 種類しかないことの利点を生かす方法である。一つの指数分布と、三つの同一指数分布を足した分布であるアーラン分布の和の分布であるため、畳み込み積分で表される。CDF は、さらにそれを積分する。式は以下である。

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\lambda_1\lambda_2^3} \int_0^\gamma \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1} - \frac{\gamma-t}{\lambda_2}\right) (\gamma-t)^2 dt \quad (5a)$$

$$F(\gamma) = \int_0^\gamma f(u) du \quad (5b)$$

積分の上限が有限であり、数値積分上で悩むところが少ない。CDF は 2 重積分になるが、プログラミングも容易であり、近年の計算機性能であれば、この程度の計算には何も問題はない。

方法 2 は、さらに簡単である。

では、CDF に対する計算精度の評価をしてみよう。 $N=4$ として、相関係数 ρ をパラメータにする。方法 2（微小摂動法）では、三つの λ_2 に対して、 $\pm 1\%$ ずらし、すなわち $(1.01, 1, 0.99) \times \lambda_2$ とする。計算機シミュレーションは乱数を用いて EC 相関環境を 1,000,000 回生成している（設定方法は[3]の 7.3.2 節参照）。図 1 は $\rho=0.95, 0.9, 0.7$ に対する比較結果である。方法 1 と 2 の計算

値は図では区別できないほど一致していて、重なって一本の線になっている。シミュレーション結果とも非常によく一致していて、この二つの方法は計算精度に問題ないと結論できる。計算の容易さという意味では方法2が圧倒的に優れており、読者の皆さんにはこの方法（微小摂動法）をお勧めしたい。

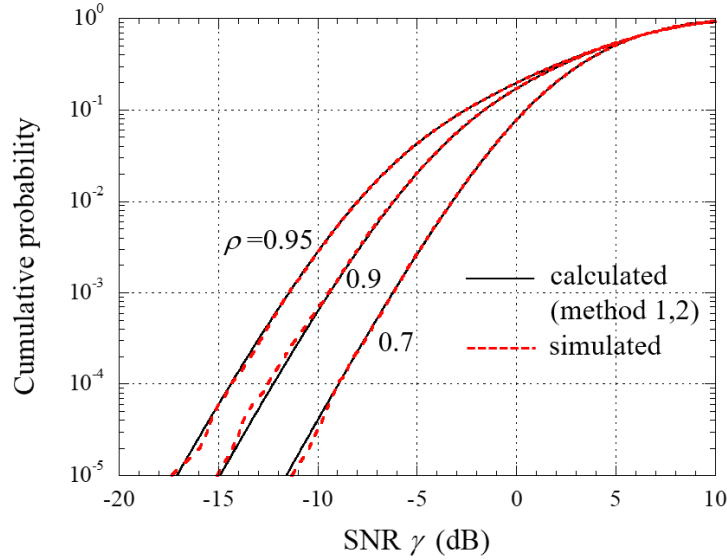


図1 等相関行列モデルに対する二つの計算手法（方法1：畳み込み積分、方法2：微小摂動法）の比較
（両手法では差が非常に小さいので重なって一本の線になっている）

先に、等相関行列モデルは、伝搬モデルとしては現実的ではないことを述べたが、実際それを採用した場合に、現実的なモデルを用いた場合の MRC 特性に対してどの程度の差が出るかを示しておきたい。

ある領域（空間や周波数など）の基準点からの変量を Δx とし、相関係数を次式で与える。

$$\rho(\Delta x) = \exp\{-a(\Delta x)^2\}$$

複素振幅の相関係数は複素数で表されるが、ここでは実数値とする。 a は Δx に対する相関値の調整係数である。この形は、水平面内において正規分布型広がりをもつ到来波環境での空間相関のモデルになる[3]。周波数相関特性などはまた別の形になるので、あくまで一つの例だと思ってほしい。以下の比較では、 $N=4$ での二つの相関行列を考える。一つは対角要素以外を $\rho(1)$ で与える等相関行列 A 、もう一つは、等間隔アレーに見られる Toeplitz 行列 B で、それぞれ、次式で与える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(1) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(3) & \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}$$

等相関の数値計算評価で、 $N=4$, $G=2$, $N_1=1$, $N_2=3$, $\lambda_1=1+3\rho(1)$, $\lambda_2=1-\rho(1)$ を扱う。図2は $\rho(1)=0.95, 0.9, 0.7$ の三つのケースについて、二つの相関行列での MRC の CDF の計算結果を示している（参考までのに $\rho=0$ の理論値も描いている）。同図は計算値のみ（EC 行列の計算は方法2）を示しているが、Toeplitz 行列の場合も含めて計算機シミュレーション結果との良好な一致は別途確認している（等相関行列については図1で確認済）。

もちろん、行列の形が違うので、両者に違いが出るのは当然であるが、その違いは、それほど大きなものではないことも分かる（相関係数が 0.7 程度以下では、ほとんど変わらなくなる）。等相関モデルに伝送特性解析上のメリットが大きいのであれば、その挙動をわきまえた上での利用には、一定の合理性があると言えそうである。

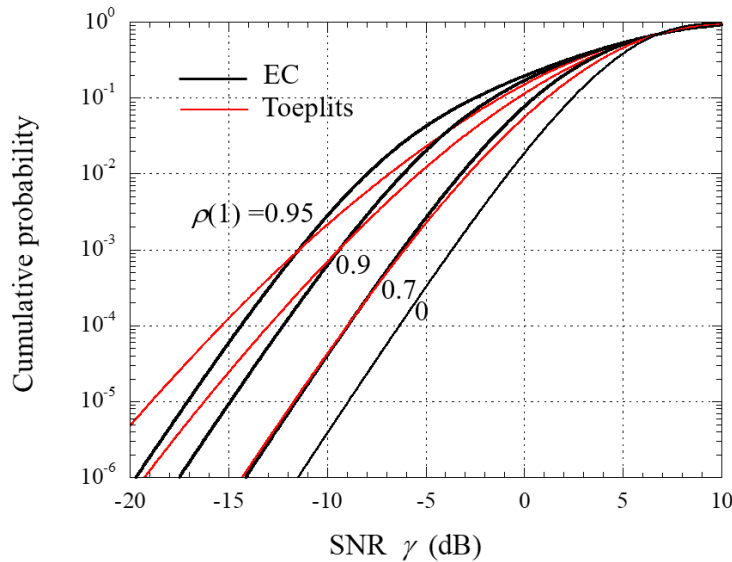


図2 等相関（EC）行列モデルと Toeplitz 行列モデルでの MRC CDF 特性の比較

参考文献

- [1] Marcel F. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, Johns Hopkins University Press, 1981.
- [2] 井上隆, 唐沢好男, “最大比合成によるフェージング抑圧性能の解析法-共分散行列の固有値に等しい値を含む場合-,” 信学論 B, vol. J86-B, no. 9, pp.2000-2008, 2003.
- [3] 唐沢好男, *デジタル移動通信の電波伝搬基礎 (改訂版)*, コロナ社, 2016.

読者の皆さんへ

本レポートはネット公開私製本「電波伝搬モデルの基礎: 確率分布と統計的推定」の[第5章](#)の補足資料として作成しました。