

仲上-ライス分布ブランチ最大比合成の確率分布について

～Talbot 法に基づく PDF・CDF の算定～

仲上-ライスフェージング環境においてアレーアンテナによるダイバーシチ合成を行う場合、各ブランチの SN 比は非心指数分布になる。最大比合成後の SN 比は各ブランチの SN 比の和になるため、目的量の確率分布（確率密度関数：PDF）は非心指数分布の和の分布になる。和の分布を求めるには特性関数（characteristic function: CF）や積率母関数（moment-generating function: MGF）を用いるのが常道であり、その手順も定まっている。しかし、設定環境によっては、最終的な確率分布式を得るのが容易でないものも多い。筆者は、先に、レイリー分布ブランチの最大比合成の確率分布について別レポート [TR-YK-093](#) にまとめている。その中でも、相関行列の固有値展開をした後の固有値の大きさに等しいものが複数含まれるようなケースでは、扱いに慎重を要すものがあった。本レポートで対象とする仲上-ライスフェージング環境ではブランチごとの確率分布が非心（＝平均値が 0 でない）であることによって、レイリー分布の解析よりさらに複雑になる。それでも、MGF を用いた解析では、最終的な MGF を求めるところまでは一気に進むことができる。難所は MGF を逆変換して確率分布（PDF）に戻すところにある。ここでは、逆変換を安定に求める近似手法である Talbot 法により、目的とする確率分布を求める手法を解説し、その精度を検証する。

1. 仲上-ライスフェージング環境

仲上-ライスフェージング環境でのブランチ毎での受信信号（ここでは伝搬路の複素振幅利得を指す）を次式で与える。

$$\mathbf{a} \equiv (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_N)^T \quad (1)$$

$$a_i(t) = a_{Di} + a_{Ri}(t), \quad a_{Di} \equiv r_{Di} e^{j\phi_{Di}}, \quad a_{Ri} \sim CN(0, 2\sigma_i^2) \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

a_D は直接波信号に代表される定常成分、 a_R は反射波や散乱波に代表される不規則変動成分である。アレーアンテナの正面方向に直接波が入射する場合、 a_{Di} は同じ値になるが、ここでは、ブランチ毎、振幅も位相も任意に与えられる状況を対象にする。相関行列 $\langle \mathbf{a}\mathbf{a}^H \rangle$ は、直接波成分と散乱波成分に分けて、次式で与えられる。散乱波成分を表す Σ_R は共分散行列と呼ばれる。

$$\langle \mathbf{a}\mathbf{a}^H \rangle = \mathbf{A}_D + \Sigma_R \quad (2)$$

$$A_D = \begin{pmatrix} r_{D1}^2 & r_{D1}r_{D2}e^{j(\phi_{D1}-\phi_{D2})} & \cdots & r_{D1}r_{DN}e^{j(\phi_{D1}-\phi_{DN})} \\ r_{D2}r_{D1}e^{j(\phi_{D2}-\phi_{D1})} & r_{D2}^2 & \cdots & r_{D2}r_{DN}e^{j(\phi_{D2}-\phi_{DN})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{DN}r_{D1}e^{j(\phi_{DN}-\phi_{D1})} & r_{DN}r_{D2}e^{j(\phi_{DN}-\phi_{D2})} & \cdots & r_{DN}^2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_R = 2 \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_N\rho_{1N} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{12}^* & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N\sigma_1\rho_{12}^* & \sigma_N\sigma_2\rho_{2N}^* & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \left(\rho_{ij} = \frac{\langle a_{Ri}a_{Rj}^* \rangle}{2\sigma_i\sigma_j} \right)$$

ブランチ i の SN 比を γ_i 、ブランチ数を N とすると、最大比合成（MRC）後の SN 比 γ は次式である。

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \cdots + \gamma_N(t) \quad (3)$$

ここからは SN 比を変数とするため、上記の変量を以下のように置き換える。

$$|a_i(t)|^2 \rightarrow \gamma_i(t), \quad 2\sigma_i^2 \rightarrow \Gamma_{Ri}, \quad r_{Di}^2 \rightarrow \Gamma_{Di}$$

この置き換えによって、共分散行列 Σ_R は次式のように書き改められる。

$$\Sigma_R = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho_{12} & \cdots & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_N}\rho_{1N} \\ \sqrt{\Gamma_2\Gamma_1}\rho_{12}^* & \Gamma_2 & \cdots & \sqrt{\Gamma_2\Gamma_N}\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\Gamma_N\Gamma_1}\rho_{12}^* & \sqrt{\Gamma_N\Gamma_2}\rho_{2N}^* & \cdots & \Gamma_N \end{pmatrix} \quad (4)$$

図 1 は、仲上-ライスフェージングが生まれる一例を示している。直接波の到来方向と散乱波の中心方向角度が同じであると、解析が少し楽になるが、図のケースはそうでないより一般的な環境を表している。以下、いくつかのケースについて見てゆきたい。

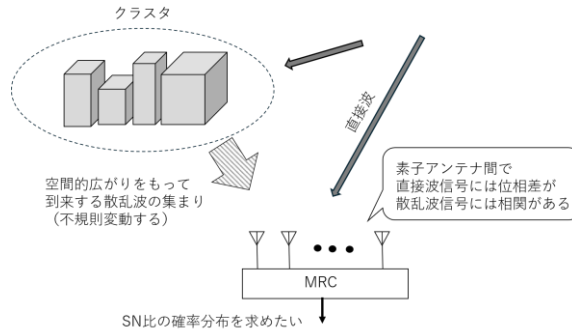


図 1 仲上-ライスフェージング環境（直接波+散乱波）に対するアレーアンテナ受信の例

2. 全ブランチ信号が同一かつ独立 (i.i.d.) の場合

MRC ダイバーシチの基本、全ブランチ出力が同一分布かつ独立（無相関）なケースを考える。

仲上-ライス分布の振幅変数 r を SN 比の変数とするために、 $r^2 \rightarrow \gamma$ とし、この分布をここでは**非心指数分布**と呼ぼう（自由度 2 の非心カイ二乗分布とも呼ばれる）。各素子の直接波信号に対する SN 比を Γ_D 、散乱波成分の平均 SN 比を Γ_R とする。このとき、非心指数分布は次式で表される。

$$f(\gamma) = \frac{1}{\Gamma_R} \exp\left(-\frac{\Gamma_D + \gamma}{\Gamma_R}\right) I_0\left(\frac{2}{\Gamma_R} \sqrt{\Gamma_D \gamma}\right) \quad (5)$$

この MGF（積率母関数）を $M_i(s)$ とすると

$$M_i(s) = \langle e^{s\gamma} \rangle = \frac{1}{1 - \Gamma_R s} \exp\left(\frac{\Gamma_D s}{1 - \Gamma_R s}\right), \quad s < \frac{1}{\Gamma_R}$$

となる（注 1）。 N ブランチの MRC の分布の MGF M は上記の N 乗になり次式である。

$$M(s) = \{M_i(s)\}^N = \langle e^{s\gamma} \rangle^N = \frac{1}{(1 - \Gamma_R s)^N} \exp\left(\frac{N\Gamma_D s}{1 - \Gamma_R s}\right) \quad (6)$$

この MGF は非心カイ二乗分布の MGF の形であり、確率分布は次式となる（注 2）。

$$f(\gamma) = \frac{1}{\Gamma_R} \left(\frac{\gamma}{N\Gamma_D}\right)^{\frac{N-1}{2}} \exp\left(-\frac{N\Gamma_D + \gamma}{\Gamma_R}\right) I_{N-1}\left(\frac{2\sqrt{N\Gamma_D \gamma}}{\Gamma_R}\right) \quad (7)$$

この分布は自由度 $2N$ の非心カイ二乗分布である[1]。

（注 1：確率分布の和の分布を扱うには、フーリエ変換に基づく特性関数（CF）を用いるのと、ラプラス変換に基づく積率母関数（MGF）を用いる二通りがある。特性関数は全ての分布に適用できて汎用性が高いが、確率変数の値が非負のもの（信号の振幅や SN 比など）については、MGF のほうが扱いやすい場合が多い。MGF では最後の逆変換に難所があるが、後述する Talbot 法などの克服手段がある。故に、MRC 分布を扱う本レポートでは MGF を用いている。

注 2：MGF から PDF を求める逆変換は経路積分が非常に複雑で、その導出手順を簡単に書き下すことはできない（4 節参照）。それでも数学ソフト（筆者が使ったのは Mathematica）ではラプラス変換/逆変換の形としてちゃんとこの式を示してくれる。順方向の PDF から MGF への変換は非常に簡単であり、あらゆる分布に対して MGF がデータベース化（＝公式集化）されている。上記 $M(s)$ はまさに、非心カイ二乗分布の MGF としてデータベースにある形であり、それを知れば、PDF はただちに見つけられる。）

3. 一般的な導出手順

1 節で示した一般的な場合についても、分布を求める手順は確立している。まずは、その流れを追ってゆく。

ステップ 1 : 共分散行列 Σ_R を固有値分解し、固有値 $\lambda_m (m=1, 2, \dots, N)$ と固有ベクトル $\mathbf{e}_m$ を求める

$$\Sigma_R = \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^H \rangle - A_D = E \Lambda E^H$$

行列 Λ は N 個の固有値を対角要素に持つ対角行列、行列 E は各固有値に属する固有ベクトルで構成されるユニタリ行列である。

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_N), \quad E = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_N)$$

ステップ 2 : ユニタリ行列 E を用いて、相関の無いブランチ出力ベクトル $\mathbf{b}$ を作る

$$\mathbf{b}(t) = E^H \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}_D + \mathbf{b}_R(t) \rightarrow \langle \mathbf{b}_R \mathbf{b}_R^H \rangle = \Lambda$$

この変換は直交座標変換である。対象とする最大比合成出力はベクトル $\mathbf{a}$ 同士の内積 (に相当する量) である。内積には、直交座標変換によって値は変わらないという性質がある。すなわち、どの時刻においても

$$\gamma(t) \rightarrow \mathbf{a}^H(t) \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}^H(t) \mathbf{b}(t)$$

となり、無相関変動に変換されている $\mathbf{b}$ の出力の最大比合成は出力 $\mathbf{a}$ で行う結果に同じである。平均値成分をもつ仲上-ライスフェージング環境では、平均値に対する相関行列 A_D も共分散行列 Σ_R のユニタリ行列で変換されるが、分布の独立を決める共分散行列には影響がない。

$$b_i(t) = \mathbf{e}_i^H \mathbf{a}(t) = \sum_{m=1}^N e_{im}^* a_{Dm} + \sum_m e_{im}^* a_{Rm}(t) \equiv b_{Di} + b_{Ri}(t) \quad (8)$$

ステップ 3 : 独立変数 $b_i(t)$ の二乗変数の確率分布を求める

振幅次元の変数 b_i の大きさ $r_i (=|b_i|)$ の確率分布は仲上-ライス分布、その二乗値 γ_i の確率分布は非心指数分布である。非心指数分布は以下である。

$$f_i(\gamma) = \frac{1}{\Gamma'_{Ri}} \exp\left(-\frac{\Gamma'_{Di} + \gamma}{\Gamma'_{Ri}}\right) I_0\left(\frac{2}{\Gamma'_{Ri}} \sqrt{\Gamma'_{Di} \gamma}\right)$$

$$\Gamma'_{Di} = |b_{Di}|^2, \quad \Gamma'_{Ri} = \langle |b_{Ri}|^2 \rangle = \lambda_i$$

ステップ 4 : 個々の非心指数分布の MGF $M_i(s)$ を求め、その積である全体の MGF $M(s)$ を求める

$$M_i(s) = \frac{1}{1 - \Gamma'_{Ri} s} \exp\left(\frac{\Gamma'_{Di} s}{1 - \Gamma'_{Ri} s}\right), \quad s < \frac{1}{\Gamma'_{Ri}}$$

$$M(s) = \prod_{i=1}^N M_i(s) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - \Gamma'_{Ri} s} \exp\left(\sum_{m=1}^N \frac{\Gamma'_{Dm} s}{1 - \Gamma'_{Rm} s}\right), \quad s < \frac{1}{\max(\Gamma'_{R1}, \Gamma'_{R2}, \dots, \Gamma'_{RN})} \quad (9)$$

ステップ 5 : MGF を逆変換して確率分布 (PDF) を求める

MGF $M(s)$ から PDF $f(\gamma)$ を求める変換はラプラス変換の逆変換と同じで、次式である (注)。

(注：この書き方は変換と逆変換の関係から違和感があると思うが、4.2 節を見てほしい)

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s\gamma} M(-s) ds, \quad \gamma > 0 \quad (10)$$

この積分の解析解を得るのが容易ではない。また、(9)式を代入した(10)式に閉形式の解がないことも知られている。故に、この解は数値積分によって求めることになる。(10)式に従って被積分関数の全ての極を左手側に見るように経路のパラメータ c を定めた無限直線経路をそのまま数値積分をすると、指数関数が爆発的な値になったり、周期的変化の収束が悪かったりして、積分がうまくゆかない (数学的には正しい式だが)。そのため、積分経路を工夫して、安定な解を得る手法が提案されていて、その代表的なものが次節で紹介する **Talbot 法** である。Talbot 法の具体的な実装部分を除けば、仲上-ライスフェージング環境において SN 比の MRC の確率分布を求めることの手順としては、本ステップで完結する。

4. Talbot 法の MGF 逆変換への適用

MGF から PDF への逆変換式を(10)式で示した。これはラプラス変換の逆変換式と同じ構造である。この積分は複素平面の縦線 (Bromwich 直線と呼ばれる) を通る。しかしこの経路は、1) 非積分関数が激しく変動する, 2) 数値積分が壊れやすい, 3) γ が小さいと特に不安定, という悪い性質をもつ。そこで、Talbot が「積分経路を変形して振動しない経路にすればよい」として考え出したのが、Talbot 法である[2], [3]。この積分経路は Talbot contour と呼ばれる。逆ラプラス変換の積分経路を数値計算に適した曲線に変形する方法である。複素面上で、極を内部に含む周回積分は経路の形に依存しないという留数定理が根拠になっている。他にも、経路変換手法の変形 (改良) は種々あり、精度や演算時間に多少の優劣はあるが[4], [5]、このケースでの目的には、Talbot 法で十分である。以下、Talbot 法を簡潔に説明する。なお、Talbot 法はラプラス逆変換の数値積分用に作られた手法であるので、変換と逆変換に定義の違いがある確率分布の MGF 解析には、若干の変更が必要になる。これについては 4.2 節で説明する。

4.1 Talbot 法とは

Talbot 法はラプラス逆変換の数値積分用に編み出された手法であるので、この節では、ラプラス変換の土俵で説明する。ラプラス変換の表関数を $f(t)$ 、裏関数を $G(s)$ とすると、次式の関係になる。

$$G(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad t > 0 \quad (11a)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s) e^{st} ds \quad (11b)$$

(11b)式の積分経路は全ての極の実数値より大きい実数値 c を通って、虚数軸方向に無限に長

い直線であり、**Bromwich 直線**と呼ばれる。数式としてはこれで良いのであるが、実際にこの経路に沿って数値積分を行うと、指数関数が爆発的な値になったり、周期的な変化が収束しなかったり、数値積分には適さない経路であることが知られている。そこで、 c 点に代表されるある一点をピン止めして、無限の両端を左手側 (s の虚数エリア) に引き伸ばすことで、数値積分を安定化する方法が種々提案されている[5]。この経路変更に際して極を越えなければ、コーシーの定理 (あるいは留数定理) により積分値は変わらないと言う性質が根拠になっている。

Talbot は複素平面に次式に示す特殊な曲線経路を考えた[2]。パラメータ θ ($-\pi \sim \pi$) で

$$s(\theta) = \mu(\theta \cot \theta + j\theta) \quad (12)$$

とすると、この曲線は 1) 実部が負に伸びるので指数 e^{sx} が減衰する, 2) その結果、虚部の振動が抑えられる, 3) Bromwich 直線と同じ積分値をもつ (留数定理), という好ましい性質をもつ。(12) 式を図に書いてみるとわかるが、横向きのラッパ型 (先が左側) になっていて、実軸の負方向無限遠方に向いて開いた形である。なお、[5]には、(12)式にさらにパラメータを増やして自由度を上げた式が示されているが、ここでは、原型である(12)式を採用する。

Talbot contour に沿って積分すると次式になる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} G(s(\theta)) e^{s(\theta)t} s'(\theta) d\theta \quad (13)$$

$$s'(\theta) \left(= \frac{ds}{d\theta} \right) = \mu(\cot \theta - \theta \csc^2 \theta + j) \quad (14)$$

これを θ で離散化して数値積分する。

$$f(t) \approx \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K G(s_k) e^{s_k t} s'_k \Delta\theta \right\} \quad (15)$$

$$s_k = s(\theta_k), \quad s'_k = s'(\theta_k), \quad \theta_k = -\pi + \frac{2\pi(k-0.5)}{K}, \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{K}$$

累積確率分布 (CDF) もラプラス変換の性質を使って、同様に求められる。

$$F(t) = \int_0^t f(t') dt'$$

のラプラス変換は

$$\mathcal{Z}\{F(t)\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{Z}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

であるので、

$$F(t) \approx \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{G(s_k)}{s} e^{s_k t} s'_k \Delta\theta \right\} \quad (16)$$

これで、MGF を適用する確率分布 (PDF, CDF) 解析への準備完了である。

4.2 確率分布解析への Talbot 法の適用

確率分布の MGF 解析は基本的に数学構造上ラプラス変換と同じである。唯一の違いは積分核の中の s の極性が反転していることである。(11)式に対応する基本式が

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt, \quad t > 0 \quad (17a)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} M(s)e^{-st} ds \quad (17b)$$

である。複素空間において s の正負が反転した鏡の中の世界のような関係になる。MGF の逆変換に Talbot 法を適用しようとする、MGF の s の正負を入れ替えるか、Talbot 経路を正負で反転するかのどちらかで対応できる。最も簡単なのは、Talbot 経路をそのまま維持し、(15),(16)式の $G(s)$ を $M(-s)$ に置き換えればよい。

$$G(s) = M(-s) \quad (18)$$

である。筆者はこの方法でプログラム実装した。

4.3 実装上の留意事項

実際にプログラムを作って動かしてみると、留意点が多いことに気付く。以下は、筆者の経験をベースにまとめているが、動作させてうまくゆかないときは、この部分を見直すと良いかもしれない。

(12)式の μ の値の設定

経路が全ての極の右側を通るように

$$\mu > \frac{-1}{\max(\Gamma'_{R1}, \Gamma'_{R2}, \dots, \Gamma'_{RN})}$$

がよく、共分散行列の固有値 (Γ'_{Ri}) は非負の実数であるため、 $\mu > 0$ であればよいように見えるが、変数 γ の値によっては誤差が大きくなる場合があった、変数 x に対して

$$\mu \propto \frac{1}{x}$$

のような設定も示唆されている[4]。本レポートの計算では、試行錯誤の末に

$$\mu = \frac{1}{\gamma} + 1 \quad (19)$$

で与えている。(9)式を見ると、1) 極が複数ありかつ、正の実軸に近い、2) 非心項で指数が暴れやすい、など仲上-ライス分布は Talbot 法にとって難しい分布であり、 μ の選び方が少しずれるだけで誤差の爆発が起きやすい。実際に使うときには結果を見ながら調整してほしい。

(15)式の経路分割数 K の設定とサンプル点

式(12), (14)は $\cot$ と $\csc$ を含んでいる。故に $\theta=0$ と $\pm\pi$ にサンプル点が入らないようにしないといけない。($\theta=0$ は非積分関数として値が発散する特異点ではなく、数値計算ができない点と言う意味)。また、 $\theta=0$ に対して正負の対称点をサンプルしないと、バランスが崩れて打ち消されるべきものが消えず、誤った結果をもたらす。(15)式に示したサンプル点設定を参考にしてほしい。分割数 K については、大きすぎると、計算不能点に近づきすぎ不安定になる。小さすぎると積分が荒くなり誤差が増える。本レポートの計算では $K=128$ に設定している。

補足

上記に従って、Matlab で動作させると、うまくゆくときとそうでないときに分かれる。うまくゆくときは非常に精度が良い（シミュレーション値とぴったり合う：この後示す図2参照）し、そうでないときは、爆発的な変化になりダメなことがすぐわかる（ γ の途中までよくて、途中から全然ダメになると言うケースもある）。CDF の計算結果が 0~1 に連続的に変化している場合は大丈夫である。この爆発的な誤差（暴走と言ってよい）の発生は、相関係数が高い（ ρ が 0.9 以上）、直接波の位相関係、散乱波電力が小さい（直接波電力に比べて -10dB 以下）のときに起きやすい（常に起きるわけではない）。原因は μ の設定の難しさにあるようであるが、計算結果を見て判断してほしい（注）。（注： 計算結果の数値爆発は、数学的には有限値である演算において、 $\infty \times 0$, ∞/∞ , $0/0$ に近づいたときに起きると考えられ、指数関数で構成される演算には起きやすい）

Talbot 経路はラプラス変換一般の逆変換に適したように工夫されている。確率分布の相関行列はエルミート行列なので固有値は全て非負の実数であり、その逆数である極も実数線上にある。この特殊性を活かすように積分経路を最適化することもできそうであるが、有効性が高いかどうかはわからない。

5. 解析結果例

基準点からの変量を Δx に対して、以下の相関特性を仮定する。

$$\rho(\Delta x) = \exp\left\{-a(\Delta x)^2\right\}$$

複素振幅の相関係数は複素数で表されるが、ここでは実数値とする。 a は Δx に対する相関値の調整係数である。この形は、水平面内において正規分布型広がりをもつ到来波（散乱波）がアレーアンテナの正面から入射する環境での空間相関のモデルになる[1]。周波数相関特性などはまた別の形になるので、あくまで一つの例だと思ってほしい。以下の比較では、 $N=4$ とし、その共分散行列 Σ_R を等間隔アレーに見られる次式の Toeplitz 行列で与える。

$$\Sigma_R = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(3) & \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}$$

表 1 に示す 4 つの環境を設定し、SN 比 γ の累積分布を求める。計算は、PDF を(15)式で求め、これを数値積分して CDF を得るもの (Calculation (1)) と、(16)式で直接求めるもの (Calculation (2)) の二つで行う (両式とも $G(t)=M(-s)$ で計算)。この結果の妥当性を確認するため、乱数を用いた計算機シミュレーション評価も行う (散乱波成分の相関環境を 1,000,000 回生成している (設定方法は[1]の 7.3.2 節参照))。図 2 は、この評価結果を示す。二つの計算値 (Calculation (1): 黒線と Calculation (2): 赤線) は完全に重なり、一本の線になっている。また、計算機シミュレーションの結果 (青点線) は計算値に一致しており、計算結果の妥当性を示している。

ここで見たように、MGF による一連の解析手順と最後の段階に適用した Talbot 法により、仲上-ライスフェージング環境における MRC の確率分布解析が精度よく求めることができることを示した。ただし、4 節でも述べたように、Talbot 法の適用には留意事項が多いことを認識したうえで、うまく活用してほしい。

表 1 仲上-ライスフェージング環境評価のための環境設定 (4 素子アレーアンテナ)

	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
a_{D1}	1	0°	1	0°	1	0°	1	0°
a_{D2}	0.8	30°	0.8	30°	1	40°	1	20°
a_{D3}	0.6	60°	0.6	60°	1	80°	1	40°
a_{D4}	0.4	90°	0.4	90°	1	120°	1	60°
Γ_R	0.5 (-3dB)		0.5 (-3dB)		0.25 (-6dB)		0.1 (-10dB)	
$\rho(1)$	0.95		0.5		0.7		0.9	

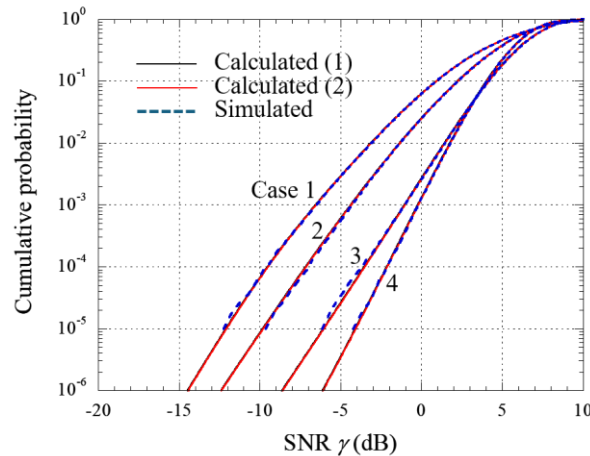


図 2 表 1 の 4 つのケースにおける CDF 計算結果とシミュレーション結果の比較

(Calculated(1): PDF の積分による ; Calculated(2): 積分計算式から直接。両線は完全に重なっている)

参考文献

- [1] 唐沢好男, デジタル移動通信の電波伝搬基礎 (改訂版), コロナ社, 2016.
- [2] A. Talbot, "The accurate numerical inversion of Laplace transforms," IMA Journal of Applied Mathematics, vol.

23, no. 1, pp. 97-120, 1979.

- [3] A. Murli, M. Rizzardi, “Algorithm 682: Talbot’s method for the Laplacian problem,” ACM Trans. Mathematical Software, vol. 16, no. 2, pp. 158-168, 1990.
- [4] J. Abate, P.P. Valkó, “Multi-precision Laplace transform inversion.” International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, no. 5, 979–993, 2004.
- [5] B. Dingfelder, J.A.C. Weideman, “An improved Talbot method for numerical Laplace transform inversion,” Springer Science+Business Media NewYork 2014, pp. 167-183, 2015.

読者の皆さんへ

- ・本レポートはネット公開私製本「電波伝搬モデルの基礎：確率分布と統計的推定」の[第5章](#)の補足資料として作成しました。
- ・レポート：[TR-YK-093「レイリー分布ブランチ最大比合成の確率分布について」](#)は本レポートの姉妹編です。