Technical Report YK-097
Oct. 20, 2026
Y. Karasawa

最大比合成ダイバーシチの理論

～レイリーフェージングと仲上-ライスフェージング～

フェージングによる信号劣化をアレーアンテナによって軽減する手法はスペースダイバーシチと呼ばれる。ブランチ信号の合成法には、選択合成（SC)、等利得合成（EGC)、最大比合成（MRC）などがあるが、軽減効果が最も大きいのは最大比合成である。最大比合成は他の合成法に比べて理論解析が行いやすく、その解析法もすでに体系化されている。しかし、実際に自分で解析を進めようとすると、いくつかの技術的な難所（隘路）が存在し、これを乗り越える必要がある。本レポートでは、レイリーフェージングと仲上-ライスフェージング環境に対する最大比合成の確率分布理論と、解析を実際に行う際の難所攻略法をまとめる。

本レポートはレイリーフェージングと仲上-ライスフェージングで別々にまとめたレポート（YK-093 と YK-094）をマージし一本にまとめたものである。

１．はじめに

マルチパスによる伝搬劣化を軽減する手法として、アレーアンテナは極めて有効である。伝搬特性の空間的な不均一性を利用し、複数素子の受信信号から良好な成分を選択できるためである。さらに、単に選択するだけでなく、各ブランチ信号に適切なウェイトを与えて合成することで、より高い性能が期待できる。このような信号合成法の中で、**最大比合成**（**MRC**: Maximal-Ratio Combining）は SN 比の劣化を最も効果的に抑える手法として知られている。MRC は各素子アンテナの受信信号の振幅と位相を最適に制御して合成するため、アナログ信号処理の時代には実装が難しかったが、ディジタル信号処理が主流となった現在では広く利用される技術となっている。

MRC は他の合成法に比べて理論解析が比較的容易であり、合成後の SN 比の確率分布の導出手順も体系化されている。MRC の出力 SN 比は各ブランチの SN 比の和で表されるため、積分変換である**積率母関数**（Moment-generating function: **MGF**）を用いた解析が一般的である。しかし、ブランチ間に相関が存在する場合、特に仲上–ライスフェージングのように直接波成分と散乱波成分がそれぞれ異なる相関構造を持つ場合には、MGF の計算に工夫が必要となる。また、MGF が得られたとしても、それを逆変換して確率分布（PDF, CDF）を求める際に数値計算が不安定になることがあり、計算の安定化が求められる。その他にも、解析の随所で様々な難所が現れる。

本レポートでは、基本的なマルチパス伝搬環境である**レイリーフェージング**および**仲上–ライスフェージング**に焦点を当て、最大比合成の確率分布解析における主要な隘路を整理し、確率分布が閉形式で表されるものについてはそれらのすべてを提示する。また、閉形式が得られず、数値積分によるものに対しては、その積分を安定に行う方法である **Talbot 法（タルボット法）**を解説する。

２．MRC の理論

遅延の広がりが無視できるマルチパス伝搬路（周波数フラットフェージング）におけるアンテナ素子 i の受信信号 r_i は次式で表される。

$$r_i(t) = h_i s(t) + n_i(t) \tag{1}$$

ここで、s, n, h は、それぞれ、送信信号、受信系雑音、伝搬路の複素振幅利得を表す。この受信信号の SN 比γ_iは次式になる（平均雑音電力 $<|n_i(t)|^2>$ は全素子同一）。

$$\gamma_i = |h_i|^2 \Gamma_S, \quad \Gamma_S = \frac{\left\langle |s(t)|^2 \right\rangle}{\left\langle |n_i(t)|^2 \right\rangle} \tag{2}$$

最大比合成は各素子の受信信号にチャネル利得 h_i（に比例するウェイト）の複素共役量を掛けて合成する。合成後の信号は

$$r(t) = \sum_{i=1}^{N} |h_i|^2 s(t) + h_i^* n_i(t) \tag{3}$$

合成後の信号の SN 比は

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} |h_i|^2 \right)^2 \left\langle |s(t)|^2 \right\rangle}{\left\langle \left| \sum_{i=1}^{N} h_i^* n_i(t) \right|^2 \right\rangle} = \sum_{i=1}^{N} |h_i|^2 \Gamma_S = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \tag{4}$$

となり、素子毎の SN 比の和になる。

ここまでは、素子信号の SN 比γ_iの時間変化を無視してきたが、実際には、$s(t)$や $n(t)$の時間変化に比べれば十分遅いものの、緩やかな時間変動を持つ。ここでは、γ_iが確率分布に従う変数と考える。レイリーフェージングの場合は、振幅$|h_i|$の分布がレイリー分布なので、その二乗の次元をもつ SN 比は**指数分布**する。仲上-ライスフェージングの場合は**自由度２の非心カイ二乗分布**である。ここでは、これを**非心指数分布**と呼ぶ。では MRC 後の SM 比の確率分布はどうなるのであろうか、というのが、本レポートの主題である。

ブランチ間で変動が無相関の場合

式(4)右辺からわかるように、目的とする量は、それぞれに確率分布する変量の和の形で表される。このような和の分布の解析には、時間変動特性をフーリエ変換して周波数次元で解析するのと同じように、確率分布を積分変換してその土俵で解析するのが常道である。具体的には、フーリエ変換タイプの特性関数（CF）、ラプラス変換タイプの積率母関数（MGF）がある。変数の定義域が正領域のみのもの（ここで扱う SN 比のような変量）では、ラプラス変換タイプと相性が良い。ラプラス変換の核関数(e^{-sx})と MGF の核関数(e^{sx})では、指数部分の極性が反転しているが、数学的には同じである。確率分布の変換をラプラス変換の定義で変換しても何も問題はないが、その形は MGF とは呼ばないものなので、ここでは MGF 定義を用いる。確率分布（PDF）

$f(x)$（$x \geq 0$）の MGF の変換とその逆変換は次式で定義される。

$$M(s) = \left\langle e^{sX} \right\rangle = \int_0^\infty e^{sx} f(x)\, dx \tag{5a}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} M(s)\, e^{-sx}\, ds \tag{5b}$$

逆変換における積分経路の実数値 c は MGF $M(s)$の全ての特異点（極）の実部より大きく、すなわち、積分路を $M(s)$の極より右側に置く。

確率変量の和（$X=X_1+X_2+ \cdots +X_N$）の分布を求めるためにはブランチ毎の分布から MGF $M_i(s)$ を求める。合成後の分布の MGF $M(s)$は、無相関変動の場合には個別の積になる次式である。

$$M(s) = \left\langle \exp\left(s \sum_{i=1}^{N} X_i \right) \right\rangle = \prod_{i=1}^{N} M_i(s) \tag{6}$$

実際の変換においては順方向の演算（式(5a)）は比較的容易に、逆方向の演算（式(5b)）は種々の困難がある。逆変換については、具体的な分布を扱うときに詳しく説明する。実際には、ほとんどあらゆる分布に対する MGF が求められていて、それがデータベース化されているので、MGF を求めて、その形に既存のものがあれば（あるいは、部分分数分解などによって既存の形の線形結合に行き着けば)、それを用いて PDF が直ちに得られる。それができない場合は数値積分演算になる。

ブランチ間で変動が有相関の場合

有相関の場合は、単純に個々の MGF の積で表すことができない。この場合は、各ブランチの有相関変動の共分散行列の**固有値分解**（Karhunen–Loève 変換：**KL 変換**）により直交変換して無相関変動に換え、この信号を用いて、前述の無相関変動の場合の解析に結び付ける。これができる根拠は以下である。

有相関のブランチ信号（複素振幅）の時系列変動をベクトル $\boldsymbol{a}$ を用いて表す。ここでは、要素の a_i を平均μ_i、分散 $2\sigma_i^2$ の複素正規分布を仮定する。

$$\boldsymbol{a}(t) \left\{ \equiv \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_N(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right\} \equiv \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{a}_R(t), \quad a_i \sim CN\left(\mu_i, 2\sigma_i^2\right) \tag{7}$$

着目している合成後の SN 比γは個々のブランチ信号の SN 比の和になるが、その量はベクトル $\boldsymbol{a}$ の自身との内積（ノルム二乗値）に比例する量になる。

$$\gamma(t) \propto \boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{a}(t)$$

以下、分布導出の流れを追ってゆく。

共分散行列Σ_R を固有値分解（KL 変換）し、固有値λ_m (m=1～N)と固有ベクトル $\boldsymbol{e}_m$ を求める。

$$\Sigma_R = \left\langle (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{H}} \right\rangle \left(\equiv \left\langle \boldsymbol{a}_R \boldsymbol{a}_R^{\mathrm{H}} \right\rangle \right) = E \Lambda E^{\mathrm{H}}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_N \end{pmatrix} \tag{8}$$

行列Λは N 個の固有値を対角要素に持つ対角行列、行列 E は各固有値に属する固有ベクトルで構成されるユニタリ行列である。

このユニタリ行列 E を用いて、相関の無いブランチ出力ベクトル $\boldsymbol{b}$ を作る

$$\boldsymbol{b}(t) = E^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{\mu}_b + \boldsymbol{b}_R(t) \quad \rightarrow \left\langle \boldsymbol{b}_R \boldsymbol{b}_R^{\mathrm{H}} \right\rangle = \Lambda \tag{9}$$

内積には直交座標変換によって値は変わらないと言う性質がある。すなわち、どの時刻においても

$$\gamma(t) \rightarrow \boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{b}(t) \tag{10}$$

となり、無相関変動に変換されている $\boldsymbol{b}$ の出力の最大比合成は出力 $\boldsymbol{a}$ で行う結果に同じである。平均値成分をもつ仲上-ライスフェージング環境では、平均値に対する相関行列 A_μも共分散行列Σ_Rのユニタリ行列で変換されるが、分布の独立を決める共分散行列には影響がない。

このようにして、有相関のブランチ信号 $\boldsymbol{a}(t)$から無相関のブランチ信号 $\boldsymbol{b}(t)$を得ることができる。以下、前述の無相関ブランチ信号の MRC の確率分布導出法に合流することで、目的が達成できる。

3．レイリーフェージング環境での MRC 確率分布

振幅がレイリー分布するレイリーフェージング環境におけるブランチ信号の SN 比は振幅変量の二乗の次元をもつ変量の分布であるので指数分布になる。指数分布とその MGF は以下である。

$$f_i(\gamma) = \frac{1}{\Gamma_i}\exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_i}\right) \qquad (\Gamma_i = <\gamma_i>) \tag{11a}$$

$$M_i(s) = \frac{1}{1-\Gamma_i s} \tag{11b}$$

3.1 同一分布無相関変動（i.i.d.）の場合

各ブランチの SN 比γ_iの平均値が全部等しい場合で、これをΓ_0とする。

γの分布の MGF $M(t)$は、(6), (11b)式より

$$M(t) = \left(\frac{1}{1-\Gamma_0 s}\right)^N \tag{12}$$

これを逆変換すれば PDF が得られる。これは**アーラン分布**（ガンマ分布の形状パラメータが整数のもの）の MGF の形なので次式になる。

$$f(\gamma) = \frac{\gamma^{N-1}}{(N-1)!\Gamma_0^N}\exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \tag{13a}$$

$$F(\gamma)=1-\exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right)\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma^{i-1}}{(i-1)!\Gamma_0^{i-1}} \tag{13b}$$

PDF が**ガンマ分布**のときは、CDF は特殊関数（不完全ガンマ関数）を含む形になるが、アーラン分布であることによって、有限和の簡易な形になっている。

3.2 平均が全て異なる無相関変動の場合

無相関変動で各ブランチ SN 比の平均値が異なる場合の MGF は次式である。

$$M(s)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\Gamma_i s} \tag{14}$$

この式は部分分数分解ができ、それぞれの逆変換から、各分布の指数関数に係数をかけた線形合成ができる。その係数（部分分数係数）をα_iとすると以下の形になる。

$$f(\gamma)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\exp\left(-\gamma/\Gamma_i\right) \tag{15a}$$

$$F(\gamma)=1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\Gamma_i\exp\left(-\gamma/\Gamma_i\right) \tag{15b}$$

$$\alpha_i=\frac{1}{\prod_{k=1}^{N}\Gamma_k\prod_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{N}\left(\frac{1}{\Gamma_j}-\frac{1}{\Gamma_i}\right)}=\Gamma_i^{N-2}\frac{1}{\prod_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{N}\left(\Gamma_i-\Gamma_j\right)}$$

係数αには以下のような性質がある。

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=0,\quad \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\alpha_i=1$$

このように指数分布の和の分布がきれいな形になるのは、指数分布の MGF が「一次極」しか持たず、和の MGF が「一次極の積」になるため、部分分数分解が有限項で終わり、逆変換が有限個の指数関数の和になるためである。他の分布は高次極や複雑な極を持つためこうはゆかない。

(15)式からもわかるように、平均値の中に一組でも値の等しいものがあると上記式での計算ができない（近傍では真値に漸近していて不連続ではないが、数値計算ができないと言う意味）。この対処については次節で詳しく述べる。

3.3 平均が同じになる組を持つ無相関変動の場合

(15)式は、全ての平均値Γ_iが違う値のときのみに成立する。一つでも同じ値があると分母が 0 になるので計算できない。実は分母が 0 になるときは分子も 0 になるので、式自体が破綻しているわけではなく、数値計算ができないと言う意味である。

等しい値をもつ組が G 組あり、グループ g のメンバー数（＝ブランチ数）を N_g、その値をΓ_gとする。

$$\sum_{g=1}^{G} N_g = N \tag{16}$$

各組の合成分布はアーラン分布であるので**アーラン分布変量の和の分布**ということになる。このようなことが発生する典型的な例は、遅延のばらつきが大きいレイリーフェージング環境（周波数選択性フェージング）でアレーアンテナ受信を行う場合であって、通信信号がスペクトル拡散されていて（DS-CDMA 方式などにより）、フェージング対策としての RAKE 機能が働いているときである。例えば、4 本のアレーで、3 フィンガーの RAKE 受信だったとすると、4×3=12 ブランチの最大比合成になる。各フィンガーで SN 比の平均値は異なる（一般的には遅延が大きくなるほど弱くなる）が、4 本のアンテナの各フィンガーの平均値は等しくなる。ブランチ間に相関がないとすれば、式(16)において、G=3, N_1=N_2=N_3=4 (N=12)のケースになる。

最大比合成後の確率分布の MGF は次式となる。

$$M(s) = \prod_{g=1}^{G} \left(\frac{1}{1-\Gamma_g s} \right)^{N_g} \tag{17}$$

ここまではよいが、この後の逆変換が難所である。スケールパラメータの異なるガンマ分布の和の分布は閉形式では表せないことが知られている。しかし、ガンマ分布の特殊形であるアーラン分布に限っては有限項の部分分数展開ができるので閉形式が得られるはずである。アーラン分布やその和の分布については、待ち行列やダイバーシチの理論その他において、深い議論がなされているが[1]-[3]、(2000 年頃において) 確率分布の式として明示されたものが見当たらなかった。そこで、井上等は（13b)式の CDF を平均値が同じ値のもの毎にグループ化し、それぞれの和として表されるような形で CDF 式を導いた[4]。PDF はその微分で得られる。ここでは、この分布を**アーラン和分布**と呼び、式を以下に示す。CDF 導出の詳細は[4]に示されているので、式のみを示して導出の手順説明は割愛する。

$$f(\gamma) = \sum_{m=1}^{G} \sum_{k=0}^{N_m-1} \eta_{m,k} \frac{\gamma^{N_m-k-1}}{\Gamma_m^{N_m-k} (N_m-k-1)!} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_m} \right) \tag{18a}$$

$$F(\gamma) = 1 - \sum_{m=1}^{G} \sum_{k=0}^{N_m-1} \eta_{m,k} Q_{m,N_m-k}(\gamma) \tag{18b}$$

$$Q_{m,n}(\gamma) = \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_m} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\gamma}{\Gamma_m} \right)^{k-1}$$

$$\eta_{m,n} = \begin{cases} \alpha_m & (n=0) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} \Gamma_m^k \frac{\partial^k \alpha_m}{\partial \Gamma_m^k} \right\} & (n \geq 1) \end{cases}$$

$$\alpha_m = \frac{\Gamma_m^{N-N_m}}{\prod_{\substack{k\neq m\\ k=1}}^{G}\left(\Gamma_m - \Gamma_k\right)}$$

$\eta_{m,n}$ 式の中に微分演算が含まれているが、これは重極の部分分数展開（重極の留数を求めるための微分公式に由来）に不可欠である。しかし、このため、G や N_m の値が大きくなると、式の書き下しが面倒になる。また、実際に使ってみると気付くと思うが、条件によって正しい値を出さない（明らかな破綻値になる）場合がある。これは、式の構造から、巨大な値から巨大な値を引いて微小値を出すような演算が含まれ、数値演算における桁落ちの影響が出るためである。大まかな判定として、

$$\sum_{m=1}^{G}\sum_{k=0}^{N_m-1}\eta_{m,k} = 1$$

となる性質が満たされているかを見るのが良い。

もう一つ、非常に簡単な方法、**微小摂動法**（perturbation method）、を述べたい。(15)式は値が同じになるから計算できないだけであって、式そのものは、値が少しでも違えば計算でき、それが微小であれば目的の値に漸近する。故に、同一値をわずかに変化させて(15)式で計算すれば、近似ではあるが求めたい分布が得られる。1%以内のオフセットが良いであろうが、低確率値の部分に生じる誤差に注意が必要である（6節での評価参照）。

3.4 有相関の場合

到来角の広がりによって空間相関が現れる[5]。アンテナ素子間隔が空間相関長より狭くなると受信信号が相関を有する。有相関信号に対する一般的な取り扱いは2節で述べたので、ここでは、レイリーフェージング環境に特化して、その続きを述べる。

レイリー分布の元となる IQ 座標2次元の複素振幅ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$を、共分散行列（相関行列）Σ を用いて以下のように表す。

$$\boldsymbol{a}(t) \equiv \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_N(t)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{a} \sim CN\left(\boldsymbol{0}, \Sigma\right) \tag{19}$$

$$\Sigma = \left\langle \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}} \right\rangle = \begin{pmatrix} \Gamma_1^2 & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\rho_{12} & \cdots & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_N}\rho_{1N} \\ \sqrt{\Gamma_2\Gamma_1}\rho_{12}^* & \Gamma_2^2 & \cdots & \sqrt{\Gamma_2\Gamma_N}\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\Gamma_N\Gamma_1}\rho_{1N}^* & \sqrt{\Gamma_N\Gamma_{2N}}\rho_{2N}^* & \cdots & \Gamma_N^2 \end{pmatrix} \quad \left(\rho_{ij} = \frac{\left\langle a_i a_j^* \right\rangle}{\sqrt{\Gamma_i\Gamma_j}}\right)$$

ここで、Γ_i はブランチ i の平均 SN 比、ρ_{ij} はブランチ i と j の相関係数である。

以下の固有値分解（KL 変換）の直交変換により、無相関変動 $\boldsymbol{b}(t)$を得る。

$$\Sigma = E\Lambda E^{\mathrm{H}}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = E^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(t) \tag{20}$$

(10)式より $\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{b}(t)$であるので、MRC 後の SN 比の確率分布を無相関変動である直交変換後の出力 $\boldsymbol{b}(t)$を用いればよい。各ブランチの平均 SN 比はΓ_1〜Γ_Nがλ_1〜λ_Nに変わったのであるから、(15)式に対して、以下のように置き換えればよい。

$$\left(\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \cdots \quad \Gamma_N\right) \rightarrow \left(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_N\right) \tag{21}$$

一般的な相関環境の固有値解析からは値の等しい固有値が出てくることはまずないので、(15)式がそのまま使える。特殊な例として、等相関行列モデルにおいては、同値固有値が現れるので、3.3 節で述べたようなアーラン和分布の取り扱いが必要になる。この等相関行列モデルについては、次節で詳しく述べる。

3.5 等相関行列モデル

アレーアンテナによるフェージング信号受信では、素子間隔に応じた空間相関を持つ。この性質は共分散行列（相関行列）で表される。その行列は、等間隔アレーのような場合には対称型 **Toeplitz 行列**（対角線に同じ値を持つ行列）モデルが一般的である。これに対して対角成分以外を同一相関値にする**等相関行列**（Equal Correlation matrix）モデル（**EC モデル**）が、無線通信の理論解析にときどき使われている（例えば、[6],[7]）。EC モデルは伝搬モデルとして不自然であるのに（＝物理的リアリティに欠けるのに）、なぜ用いられるのであろうか。大きな理由は、他の特性（例えば通信路容量など）と結び付けて解析するときに、簡易な取り扱いができる等による。また、Toeplitz 行列のような実際的なモデル等に比べて、相関が強く働く環境設定になるので、伝送特性の最悪値を抑えたいと言うような利用もある。

EC モデルは、素子間の相関係数を実数値ρとするとき、相関行列は以下の形になる。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \cdots \\ \rho & 1 & \rho & \cdots \\ \rho & \rho & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \tag{22}$$

N素子 EC 行列の固有値は、一つの固有値λ_1と N-1 の同じ値の固有値λ_2をもつ。それぞれの値は、

$$\lambda_1 = 1+(N-1)\rho \quad \left(N_1 = 1\right) \tag{23a}$$

$$\lambda_2 = 1-\rho \qquad \left(N_2 = N-1\right) \tag{23b}$$

EC モデルでの相関係数（対角成分以外の）を複素数とし、$i<j$でρ、$i>j$でρ^*としても、固有値は 2 種類で、λ_1=1+(N-1)Re(ρ), λ_2=1-Re(ρ)になる。しかし、EC モデルに対してこのような複素相関を考える意味を見出すことは難しく、ゆえに、以降の計算では相関係数ρは実数とする。

最大比合成後の確率分布 PDF の式は、(18)式で計算できるが、簡易ではないし、前述のとおり数値計算破綻も気になる（γの値の小さいところに現れやすい）。ここでは、EC モデルに特化した MRC 分布の計算式を示す。同一固有値の N-1 指数分布変量の和は形状パラメータ値が N-

1 のアーラン分布である。ゆえに MRC の分布は指数分布変量 X とアーラン分布変量 Y の和 $Z=X+Y$ である。二つの独立な分布変量の和は以下のようにして畳み込み積分で表される。

$$\begin{aligned} f_{EC}(\gamma) &= \int_0^{\gamma} f_Y(y) f_X(\gamma - y)\, dy \\ &= \frac{1}{(N_2-1)!\lambda_1 \lambda_2^{N_2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\lambda_1}\right) \int_0^{\gamma} y^{N_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right) y\right\} dy \\ &= \frac{\lambda_1^{N_2-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)^{N_2}} \left\{ \exp\left(-\frac{\gamma}{\lambda_1}\right) - \exp\left(-\frac{\gamma}{\lambda_2}\right) \sum_{n=0}^{N_2-1} \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^n \gamma^n}{n!\lambda_1^n \lambda_2^n} \right\} \end{aligned} \tag{24}$$

上式の積分解法に、整数 k に対して成立する次式の不完全ガンマ関数の展開式を用いている。

$$\int_0^x y^{k-1} e^{-\alpha y}\, dy = \frac{(k-1)!}{\alpha^k} \left\{ 1 - e^{-\alpha x} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^n}{n!} \right\}$$

CDF の式も PDF の積分で求められるが、不完全ガンマ関数で構成される多項式になり、計算に都合の良い形ではない。故に、CDF での評価は、(24)式の数値積分で行うのが良いであろう。

本節の冒頭で、EC モデルには物理的なリアリティがないと述べたが、あえて探すなら、次のような伝搬環境が考えられる。直接波が遮蔽されたレイリーフェージング環境において、その散乱波が二つのクラスタから到来しているとする。一つは、広い角度範囲に分布する散乱エリア（クラスタ１）、もう一つは、狭い範囲に分布する散乱エリア（クラスタ２；アレーの正面方からの到来を仮定）で、アレーアンテナの素子間相関に対して、前者は無相関（素子当たりの平均受信電力 P_1）、後者は完全相関（P_2）とする。この場合、すべてのアンテナ間の相関係数が $P_2/(P_1+P_2)$ の EC 行列になる。このように EC モデルの適用環境を探すことはできるが、本質的には伝搬モデル（物理チャネルの構造を取り入れたモデル）ではなく**チャネルモデル**（伝送特性評価用モデル）の位置づけになる。

EC モデルの MRC 適用例については[8]でまとめているので、詳細はそちらを見てほしい。

４．仲上-ライス環境での MRC 確率分布

4.1 同一分布無相関変動（i.i.d.）の場合

仲上-ライス分布の振幅変量 r を SN 比の変数とするために、$r^2 \rightarrow \gamma$ とし、この分布をここでは**非心指数分布**と呼ぼう（正式には自由度 2 の非心カイ二乗分布）。各素子の直接波信号に対する SN 比 γ_i を Γ_{Di}、散乱波成分の平均 SN 比を Γ_{Ri} とする。このとき、非心指数分布は次式で表される。

$$f_i(\gamma_i) = \frac{1}{\Gamma_{Ri}} \exp\left(-\frac{\Gamma_{Di}+\gamma_i}{\Gamma_{Ri}}\right) I_0\left(\frac{2}{\Gamma_{Ri}}\sqrt{\Gamma_{Di}\gamma_i}\right) \tag{25}$$

ここで、I_0 は第一種の 0 次変形ベッセル関数である。この MGF を $M_i(s)$ とすると次式となる。

$$M_i(s) = \left\langle e^{s\gamma} \right\rangle = \frac{1}{1-\Gamma_R s} \exp\left(\frac{\Gamma_D s}{1-\Gamma_R s}\right), \quad s < \frac{1}{\Gamma_R} \tag{26}$$

N ブランチの MRC の分布の MGF M は上記の N 乗になり次式である。

$$M(s)=\left\{M_i(s)\right\}^N=\frac{1}{\left(1-\Gamma_R s\right)^N}\exp\left(\frac{N\Gamma_D s}{1-\Gamma_R s}\right) \tag{27}$$

この MGF は非心カイ二乗分布の MGF の形であり、確率分布は次式となる[5]。

$$f(\gamma)=\frac{1}{\Gamma_R}\left(\frac{\gamma}{N\Gamma_D}\right)^{\frac{N-1}{2}}\exp\left(-\frac{N\Gamma_D+\gamma}{\Gamma_R}\right)I_{N-1}\left(\frac{2\sqrt{N\Gamma_D\gamma}}{\Gamma_R}\right) \tag{28}$$

MGF の形から既に見えていたように、この分布は**自由度 2*N* の非心カイ二乗分布**である。

4.2 有相関変動の場合

(10)式からの続きになる。独立変量 $b_m(t)$の二乗変数の確率分布を求める

振幅次元の変量 b_m の大きさ r_m（$=|b_m|$）の確率分布は仲上-ライス分布、その二乗値γ_m の確率分布：非心指数分布は以下である。

$$f_m(\gamma)=\frac{1}{\Gamma'_{Rm}}\exp\left(-\frac{\Gamma'_{Dm}+\gamma}{\Gamma'_{Rm}}\right)I_0\left(\frac{2}{\Gamma'_{Rm}}\sqrt{\Gamma'_{Dm}\gamma}\right) \tag{29}$$

$$\Gamma'_{Dm}=\left|\mu_{bm}\right|^2,\quad \Gamma'_{Rm}=\left\langle\left|b_{Rm}\right|^2\right\rangle=\lambda_m$$

個々の非心指数分布の MGF $M_m(s)$を求め、その積である全体の MGF $M(s)$を求める

$$M_m(s)=\frac{1}{1-\Gamma'_{Rm}s}\exp\left(\frac{\Gamma'_{Dm}s}{1-\Gamma'_{Rm}s}\right),\quad s<\frac{1}{\Gamma'_{Rm}}$$

$$M(s)=\prod_{i=1}^{N}M_i(s)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\Gamma'_{Ri}s}\exp\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{\Gamma'_{Dm}s}{1-\Gamma'_{Rm}s}\right),\quad s<\frac{1}{\max\left(\Gamma'_{R1},\Gamma'_{R2},\cdots,\Gamma'_{RN}\right)} \tag{30}$$

この MGF を逆変換して確率分布（PDF）を求めればよい。実はここが難所なのである。

MGF $M(s)$から PDF $f(\gamma)$を求める逆変換の公式は(5b)である。上記 MGF をここに入れても、閉形式では表せないことが知られている。故に、数値積分で解くしかないのであるが、(5b)式のままでは、演算結果が安定しない問題がある（指数関数の爆発や周期的変動の残留などで）。これは、ラプラス変換の逆変換（数値積分）に常に存在する問題で、故に、その対策が種々提案されている。その有力なものとして、Talbot 法がある[10]-[13]。Talbot 法はコーシーの積分定理を利用して、積分結果が変わらない条件で、数値積分結果が安定するように積分経路を変更する方法の一つである。Talbot 法については、5 節で詳しく解説する。Talbot 法はラプラス逆変換のために編み出された方法であり、MGF とラプラス変換では積分核である指数関数の極性が反転していて、MGF の逆変換に Talbot 法をそのまま適用することはできない。最も簡単な対処法は、以下の式のように、MGF $M(s)$を $M(-s)$として、Talbot 法をそのまま適用することである。

$$f(\gamma)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\text{Talbot contour}}e^{s\gamma}M(-s)\,ds,\quad \gamma>0 \tag{31}$$

形式的には、これで求めたい確率分布が得られたことになる。Talbot 法の具体的な適用法については次節で説明する。

５．ラプラス逆変換の数値積分手法：Talbot 法

MGF から PDF への逆変換式を(5b)式で示した。これはラプラス変換の逆変換式と同じ構造である。この積分は複素平面の縦線を通る。しかしこの経路は、1)　被積分関数が激しく変動する, 2) 数値積分が壊れやすい, 3) γ が小さいと特に不安定, と言う悪い性質をもつ。そこで、Talbot が「積分経路を変形して振動を抑える経路にすればよい」として考え出したのが、**Talbot 法**である[9]。この積分経路は **Talbot contour** と呼ばれる。逆ラプラス変換の積分経路を数値計算に適した曲線に変形する方法である。複素面上で、極を横切らない限り積分の値は経路の形に依存しないという**コーシーの積分定理**が根拠になっている。他にも、経路変換手法の変形（改良）は種々あり、精度や演算時間に多少の優劣はあるが[10]-[12]、MGF 逆変換には Talbot 法で十分である。以下、Talbot 法を簡潔に説明する。なお、Talbot 法はラプラス逆変換の数値積分用に作られた手法であるので、変換と逆変換に定義の違いがある確率分布の MGF 解析には、若干の変更が必要になる。これについては 5.2 節で説明する。

5.1　Talbot 法とは

Talbot 法はラプラス逆変換の数値積分用に編み出された手法であるので、この節では、ラプラス変換の土俵で説明する。ラプラス変換の元の関数を $f(t)$、変換後の関数を $G(s)$とすると次式の関係になる。

$$G(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,\ \ t>0 \tag{32a}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s)e^{st}\,ds \tag{32b}$$

(32b)式の積分経路は全ての極の実数値より大きい実数値 c を通って、虚数軸方向に無限に長い直線であり、**Bromwich 直線**と呼ばれる。数式としてはこれで良いのであるが、実際にこの経路に沿って数値積分を行うと、指数関数が爆発的な値になったり、周期的な変化が収束しなかったりで、数値積分には適さない経路であることが知られている。そこで。c 点に代表されるある一点（c 点でなくてもよいが）をピン止めして、無限の両端を左手側（実数の負のエリア）に引き伸ばすことで、数値積分を安定化する方法が種々提案されている。この経路変更に際して極を越えなければ、コーシーの積分定理により積分値は変わらないと言う性質が根拠になっている（注）。（注：経路の途中ばかりでなく、無限先の始点と終点も積分寄与が 0 になっていれば端点も動かすことができる。次式で示す Talbot 経路はコーシーの積分定理とこの終端条件の二つが満たされた変形になっている。）

Talbot は複素平面に次式に示す特殊な曲線経路を考えた[9]。パラメータθ（$-\pi$～ π）で

$$s(\theta)=\mu\left(\theta\cot\theta+j\theta\right) \tag{33}$$

とすると、この曲線は 1) 実部が負に伸びるので指数 e^{sx} が減衰する, 2) その結果、虚部の振動が

抑えられる, 3) Bromwich 直線と同じ積分値をもつ（コーシーの積分定理）, と言う好ましい性質をもつ。(33)式を図に書いてみるとわかるが、実数値μを右端位置にした左向きの U 字型になっていて、実軸の負方向無限遠方に向いて開いた形である。なお、[12]には、(33)式にさらにパラメータを増やして自由度を上げた式が示されているが、ここでは、原型である(33)式を基本とする。

Talbot contour に沿って積分すると次式になる。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} G\big(s(\theta)\big)e^{s(\theta)t}s'(\theta)\,d\theta \tag{34}$$

$$s'(\theta)\left(=\frac{ds}{d\theta}\right)=\mu\left(\cot\theta-\theta\csc^2\theta+j\right)$$

これをθで離散化して数値積分する。

$$f(t)\approx \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi j}\sum_{k=1}^{K}G(s_k)e^{s_k x}s_k'\Delta\theta\right\} \tag{35}$$

$$s_k=s(\theta_k),\ s_k'=s'(\theta_k),\ \theta_k=-\pi+\frac{2\pi(k-0.5)}{K},\ \Delta\theta=\frac{2\pi}{K}$$

累積確率分布（CDF）もラプラス変換の性質を使って、同様に求められる。

$$F(t)=\int_0^t f(t')dt'$$

のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=\frac{1}{s}G(s)$$

であるので、

$$F(t)\approx \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi j}\sum_{k=1}^{K}\frac{G(s_k)}{s}e^{s_k t}s_k'\Delta\theta\right\} \tag{36}$$

これで、MGF を適用する確率分布（PDF, CDF）解析への準備完了である。

5.2 確率分布解析への Talbot 法の適用

確率分布の MGF 解析は基本的に数学構造上ラプラス変換と同じである。唯一の違いは積分核の中の s の極性が反転していることである。(32)式に対応する基本式が

$$M(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{st}\,dt,\ \ t>0 \tag{37a}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} M(s)e^{-st}\,ds \tag{37b}$$

である。複素空間において s の正負が反転した鏡の中の世界のような関係になる。MGF の逆変

換に Talbot 法を適用しようとすると、MGF の s の正負を入れ替えるか、Talbot 経路を正負で反転するかのどちらかで対応できる。簡単なのは前者で、Talbot 経路をそのまま維持し、(34)式の $G(s)$を $M(-s)$に置き換えればよい。

$$G(s) = M(-s) \tag{38}$$

筆者はこの方法で Talbot 法を実行している。

5.3 実装上の留意事項

実際にプログラムを作って動かしてみると、留意点が多いことに気付く。以下は、筆者の経験をベースにまとめているが、動作させてうまくゆかないときは、この部分を見直すと良いかもしれない。

(33)式のμの値の設定

経路が全ての極の右側を通るように

$$\mu > \frac{-1}{\max\left(\Gamma'_{R1}, \Gamma'_{R2}, \cdots, \Gamma'_{RN}\right)}$$

がよく、共分散行列の固有値（Γ'_{Ri}）は非負の実数であるため、μ>0 であればよいように見えるが、変量γ の値によっては誤差が大きくなる場合があった、変量 x に対して

$$\mu \propto \frac{1}{x}$$

のような設定も示唆されている[11]。本レポートの計算では、試行錯誤の末に

$$\mu = \frac{1}{\gamma} + 1 \tag{39}$$

で与えている。仲上-ライス分布の(30)式を見ると、1) 極が複数ありかつ、正の実軸に近い、2) 非心項で指数が暴れやすい、など仲上-ライス分布は Talbot 法にとって難しい分布であり、μの選び方が少しずれるだけで誤差の爆発が起きやすい。実際に使うときには結果を見ながら調整してほしい。

(35)式の経路分割数 K の設定とサンプル点

式(33), (34)は cot と csc を含んでいる。故にθ=0 と$\pm\pi$ にサンプル点が入らないようにしないといけない。（θ=0 は非積分関数として値が無限大になる特異点ではなく、数値計算ができない点と言う意味）。また、θ=0 に対して正負の対称点をサンプルしないと、バランスが崩れて打ち消されるべきものが消えず、誤った結果をもたらす。(35)式に示したサンプル点設定を参考にしてほしい。分割数 K については、大きすぎると、計算不能点に近づきすぎ不安定になる。小さすぎると積分が荒くなり誤差が増える。本レポートの計算では K=128 に設定している。

補足

上記に従って、Matlab で動作させると、うまくゆくときとそうでないときに分かれる。うまくゆくときは非常に精度が良い（シミュレーション値とぴったり合う：この後示す図１、図２参照）

し、そうでないときは、爆発的な変化になりダメなことがすぐわかる（γ の途中までよくて、途中から全然ダメになると言うケースもある）。CDF の計算結果が 0〜1 内に得られている場合は大丈夫である。この爆発的な誤差（暴走と言ってよい）の発生は、相関係数が高い（ρが 0.9 以上）、直接波の位相関係、散乱波電力が小さい（直接波電力に比べて-10dB 以下）のときに起きやすい（常に起きるわけではない）。原因はμの設定の難しさにあるようであるが、計算結果を見て判断してほしい（注）。（注:　計算結果の数値爆発は、数学的には有限値である演算において、$\infty \times 0,\ \infty/\infty, 0/0$ に近づいたときの有効桁数不足によって起きると考えられ、指数関数で構成される演算には起きやすい）

Talbot 経路はラプラス変換一般の逆変換に適したように工夫されている。確率分布の相関行列はエルミート行列なので固有値は全て非負の実数であり、その逆数である極も実数線上にある。この特殊性を活かすように積分経路を最適化することもできそうであるが、Talbot 経路以上に有効性が高いかどうかはわからない。

６．解析例

複雑な計算式、あるいは数値積分でしか求まらないような二つのケースについて、複数の可能な手法で確率分布（PDF, CDF）を求め、それぞれの手法の特徴を明らかにする。なお、3.5 節の EC 行列モデルについては、伝搬モデルとして一般的な Toeplitz 型相関行列モデルとの MRC 特性比較を[8]で行っているので、ここには取り上げない。

6.1 レイリーフェージングのアーラン和分布：G=2, N_1=N_2=4 の場合

計算が最も面倒なのは、(18)式で与えられるアーラン和分布（同一平均値を含む場合）である。そこで、一例として、G=2, N_1=N_2=4 (N=8)をいくつかの方法で CDF を求めてみよう。比較する手法は

① CDF を(18b)式で求める（アーラン和分布式の検証）
② 微小摂動法で求める（近似手法としての精度）
③ Talbot 法で求める（手法の有効性）

評価では、二つのグループのそれぞれのブランチ信号 SN 比の平均値Γ_1, Γ_2を$(\Gamma_1+\Gamma_2)/4=1$ で与え、Γ_1 とΓ_2 の比率をパラメータとする。①については、同条件を書き下した式が[4]に例として挙げられているのでそれを参照してほしい。②の微小摂動法では、オフセット量を値の±1%幅内で均等に与えている。

図 1 はΓ_1 とΓ_2 の比率を、0.95:0.05, 0.9:0.1, 0.7:0.3, 0.55:0.45 としたときの結果である。同図では、①〜③の結果がそれぞれ一本の線に重なり、どの方法でも高精度な推定が可能であることがわかる。ただし、②の微小摂動法では、この条件（＝±1%以内の均等ずらし）では、累積確率 10^{-7} 以下（図の範囲外）に誤差が現れるのを確認している。その点に注意を払いつつ用いるのであれば、計算が非常に簡易であるので、特性の全体把握をしたい場合などには非常に有効である。また、①の計算式（(18)式）と③の Talbot 法では、今回の設定範囲では、累積確率の 10^{-10} 以下まで精度の良い結果を示している。ただし、本文にも書いたように設定条件によっては、0 や無限大に近い演算に伴う数値演算の桁落ちによって、破綻する結果をもたらす場合もある。結果を見ながら判断してほしい。

ここでは CDF の比較結果を示したが、同様に PDF の比較も行っていて、CDF で得た比較結果と変わらない（＝どの方法も精度に差がない）ことを確認している。

他の例を含めていろいろな評価を行った結果から総合的に判断すると、

・計算精度の優劣： ①（アーラン和分布式）≒ ③（Talbot 法）≥ ②（微小摂動法）

・計算結果の安定性： ② >> ③ > ①

の印象である。

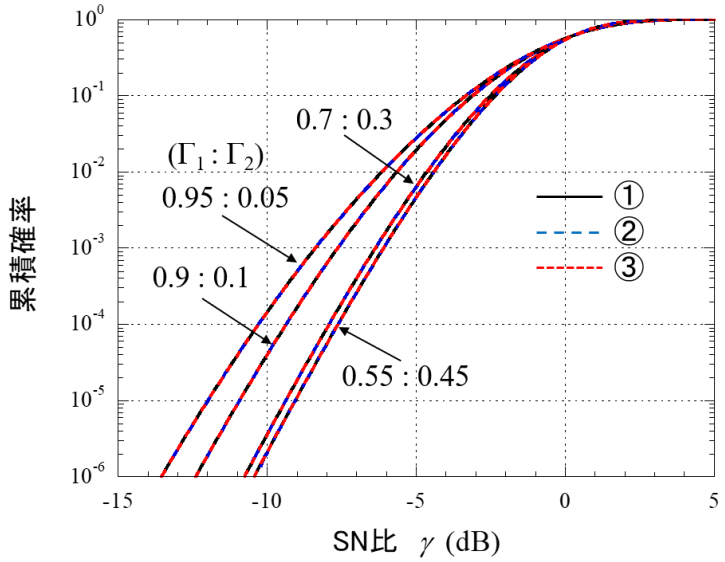

図 1　アーラン和分布（G=2, N_1 =N_2 = 4, Γ_1 +Γ_2 =1/4）CDF の三つの手法による比較
（①：アーラン和の式、②：微小摂動法、③：Talbot 法の三つの線が重なって一本の線になっている）

6.2 有相関仲上-ライスフェージング：N=4 の場合

確率分布を閉形式に書き下せない有相関仲上-ライスフェージング環境での MRC を取り上げ、Talbot 法の有効性を調べる。

基準点からの変量をΔx に対して、以下の相関特性を仮定する。

$$\rho(\Delta x) = \exp\left\{-a(\Delta x)^2\right\}$$

複素振幅の相関係数は複素数で表されるが、ここでは実数値とする。a はΔx に対する相関値の調整係数である。この形は、水平面内において正規分布型広がりをもつ到来波（散乱波）がアレーアンテナの正面から入射する環境での空間相関のモデルになる[5]。周波数相関特性などはまた別の形になるので、あくまで一つの例だと思ってみてほしい。以下の比較では、N=4 とし、その共分散行列Σ_R を等間隔アレーに見られる次式の Toeplitz 行列で与える。

$$\Sigma_R = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(3) & \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}$$

表 1 に示す 4 つの環境を設定し、SN 比γの累積分布を求める。計算は、PDF を(35)式で求め、これを数値積分して CDF を得るもの（Calculation (1)）と、(36)式で直接求めるもの（Calculation (2)）の二つで行う（両式とも $G(t)=M(-s)$で計算）。この結果の妥当性を確認するため、乱数を用いた計算機シミュレーション評価も行う(散乱波成分の相関環境を 1,000,000 回生成している(環境設定方法は[5]の 7.3.2 節参照））。図 2 は、この評価結果を示す。二つの計算値（Calculation (1)：黒線と Calculation (2)：赤線））は完全に重なり、一本の線になっている。また、計算機シミュレーションの結果（青点線）は計算値に一致しており、計算結果の妥当性を示している。

ここで見たように、MGF による一連の解析手順と最後の段階に適用した Talbot 法により、仲上-ライスフェージング環境における MRC の確率分布解析が精度よく求めることができることを示した。ただし。5 節でも述べたように、Talbot 法の適用には留意事項が多いことを認識した上で、うまく活用してほしい。

表 1　仲上-ライスフェージング環境評価のための環境設定（4 素子アレーアンテナ）

	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
a_{D1}	1	0°	1	0°	1	0°	1	0°
a_{D2}	0.8	30°	0.8	30°	1	40°	1	20°
a_{D3}	0.6	60°	0.6	60°	1	80°	1	40°
a_{D4}	0.4	90°	0.4	90°	1	120°	1	60°
Γ_R	0.5 (-3dB)		0.5 (-3dB)		0.25 (-6dB)		0.1 (-10dB)	
$\rho(1)$	0.95		0.5		0.7		0.9	

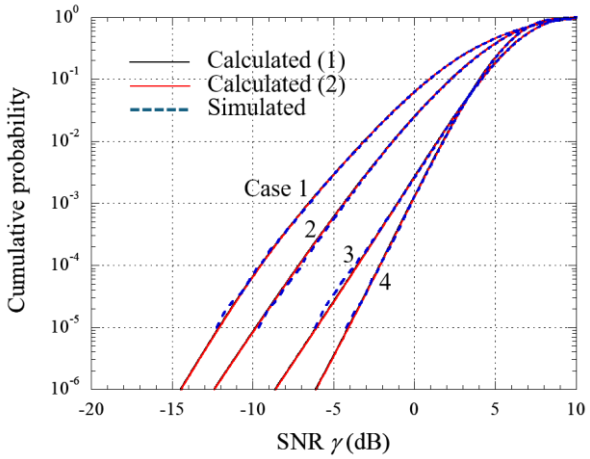

図 2　表 1 の 4 つのケースにおける CDF 計算結果とシミュレーション結果の比較
（Calculated(1): PDF の積分による；Calculated(2): 積分計算式から直接。両線は完全に重なっている）

7．まとめ

本レポートでは､伝搬モデルの基礎分布であるレイリー分布と仲上–ライス分布に焦点を当て、MRC 後の SNR の確率分布を導出するための式を系統的に提示した。これらの解析は、より一般的には「有相関多変量確率分布の変量合成問題」として位置付けられる。今回扱ったレイリー／仲上-ライス分布の場合は、多変量指数分布および多変量非心指数分布に対応するが、他のフ

ェージング分布であっても同様の枠組みで組み立てることができる。

無相関の場合には、各ブランチの MGF を求めて積を形成し、その逆変換から合成後の PDF を得るという標準的な手法が適用できる。相関がある場合には、共分散行列の固有値分解による KL 変換を前処理として用いることで、無相関なブランチ信号に変換でき、以降は無相関の場合と同じ解析手順を踏むことが可能となる。MGF 解析では逆ラプラス変換が難所となるが、複素面上での積分経路を工夫する Talbot 法などの手法により克服できる。

参考文献

[1] D. R. Cox and W. L. Smith, *Queues*, Oxford University Press.1961

[2] Marcel F. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, Johns Hopkins University Press, 1981.

[3] M. K, Simon and M-S. Alouini, *Digital communication over fading channels*, IEEE Press, Jhn Wily & Sons Inc., 2005.

[4] 井上隆, 唐沢好男, “最大比合成によるフェージング抑圧性能の解析法-共分散行列の固有値に等しい値を含む場合-,” 信学論 B, vol. J86-B, no. 9, pp.2000-2008, 2003.

[5] 唐沢好男, *ディジタル移動通信の電波伝搬基礎（改訂版）*, コロナ社, 2016.

[6] R. K. Mallik, “The uniform correlation matrix and its application to diversity,” IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 6, no.5, pp. 1619-1625, 2007.

[7] Y. Chen and C. Tellambura, “Distribution functions of selection combiner output in equally correlated Rayleigh, Rician, and Nakagami-m fading channels,” IEEE Trans. Commun., vol. 52, no. 11, pp. 1948-1956, 2004.

[8] 唐沢好男, “等相関行列チャネルモデルについて,” 信学技報, AP- , （2026 年 12 月 AP 研発表予定）

[9] A. Talbot, “The accurate numerical inversion of Laplace transforms,” IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 23, no. 1, pp. 97-120, 1979.

[10] A. Murli, M. Rizzardi, “Algorithm 682: Talbot’s method for the Laplacian problem,” ACM Trans. Mathematical Software, vol. 16, no. 2, pp. 158-168, 1990.

[11] J. Abate, P.P. Valkó, “Multi-precision Laplace transform inversion.” International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, no. 5, 979–993, 2004.

[12] B. Dingfelder, J.A.C. Weideman, “An improved Talbot method for numerical Laplace transform inversion,” Springer Science+Business Media NewYork 2014, pp. 167-183, 2015.